



HAL
open science

La ségrégation spatiale selon Schelling : la perversité est ailleurs

Michel Forsé, Maxime Parodi

► **To cite this version:**

Michel Forsé, Maxime Parodi. La ségrégation spatiale selon Schelling : la perversité est ailleurs. 2006.
hal-00973079

HAL Id: hal-00973079

<https://sciencespo.hal.science/hal-00973079>

Preprint submitted on 3 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Document de travail

« LA SÉGRÉGATION SPATIALE SELON SCHELLING : LA PERVERSITÉ EST AILLEURS »

N° 2006-05

Mars 2006

Michel Forsé

CNRS et OFCE

michel.forse@sciences-po.fr

Maxime Parodi

OFCE

maxime.parodi@sciences-po.fr

Observatoire Français des Conjonctures Économiques

69, Quai d'Orsay 75340 Paris Cedex 07

Tel : 01 44 18 54 00 Fax : 01 45 56 06 15

E-mail: ofce@ofce.sciences-po.fr Web: <http://www.ofce.sciences-po.fr>

La ségrégation spatiale selon Schelling : la perversité est ailleurs

Michel Forsé (OFCE et CNRS)

Maxime Parodi (OFCE)

Résumé

La modélisation de la ségrégation spatiale proposée dans les années 1970 par Thomas C. Schelling a marqué les esprits en raison de l'effet pervers qu'elle suggérait : une forte ségrégation pourrait être le résultat collectif de décisions individuelles qui ne visent pas à une telle ségrégation. Nous aurions affaire à un phénomène quasi spontané. Le problème est qu'une telle conclusion contredit purement et simplement le principe entropique. Un examen plus attentif du modèle permet ici de repérer pas moins de quatre biais qui conditionnent le résultat. Toute prétention du modèle de Schelling à une quelconque généralité se trouve ainsi réfutée. La ségrégation urbaine a de nombreuses causes, qu'il est plus urgent d'étudier que la fiction d'un monde ségrégué « malgré nous ».

Code JEL : C73 ; J15 ; R00

Dans les années 1970, Thomas C. Schelling (1971, 1978) a proposé un modèle pour expliquer le lien entre ségrégation spatiale et préférences individuelles concernant cette ségrégation. Ce modèle a une portée générale puisqu'il suffit pour le mettre en œuvre de disposer d'une information concernant ces préférences individuelles et d'une dichotomie permettant de ranger une population en deux groupes distincts. Mais c'est incontestablement son application au cas urbain qui a fait son succès. Il fait aujourd'hui partie des illustrations frappantes de ce qu'est un effet pervers et il est même connu, du moins en France, par certains travailleurs sociaux des banlieues. Il faut dire que sa conclusion principale a de quoi marquer les esprits par son côté paradoxal. Schelling montre en effet à partir d'une simulation très simple qu'une forte ségrégation peut être le résultat collectif de décisions individuelles qui ne visent pas, elles, à une telle ségrégation. Il y aurait effet pervers : même si les individus sont assez tolérants, et indépendamment d'autres paramètres comme les prix des loyers et les niveaux de revenu, on aboutit de toute façon à une ségrégation urbaine élevée.

En examinant de près ce modèle, on découvre toutefois qu'il comporte de nombreux biais. Comme ils n'ont pas été jusqu'à présent mis en lumière, leur rôle a été ignoré. Ce sera donc l'objectif de cette étude que de repérer ces biais et d'en apprécier les effets sur les niveaux de ségrégation constatés. Tout l'enjeu est de savoir si cette ségrégation dépasse par effet pervers ou de système ce à quoi l'on peut s'attendre compte tenu du cadre biaisé du jeu ou si, au contraire, elle n'est que la traduction de ce cadre, auquel cas il n'y a évidemment plus rien de surprenant ou de paradoxal dans ce que le modèle de Schelling prédit en matière de ségrégation.

Après avoir rappelé comment se présente ce modèle et situer son enjeu relativement au principe d'entropie, nous examinerons tout d'abord les niveaux de ségrégation spatiale résultant du seul hasard. Ceci permettra de pointer les éventuels décalages dus au processus mis en œuvre par Schelling pour en venir ensuite à l'étude des biais que ce processus comporte et montrer qu'ils expliquent totalement (autrement dit, construisent de toute pièce) les niveaux de ségrégation atteints. Cette absence de tout effet pervers nous conduira à souligner également, pour terminer, certaines des limites des extensions du modèle proposées plus récemment.

1. Le modèle de Schelling

Rappelons donc pour commencer comment se présente ce modèle. Prenez un échiquier (une matrice 8×8) et placez-y des pions de deux genres différents. Vous avez là une représentation très stylisée d'une aire urbaine où se côtoient deux populations. Ce pourrait être des Catholiques et des Protestants, des riches et des pauvres ou tout autre clivage. Pour représenter un tel clivage, disons que nous allons répartir des pions noirs et blancs sur l'échiquier. Au départ, ces pions sont rangés alternativement pour représenter l'intégration la plus parfaite possible entre deux communautés.

Schelling ajoute ensuite une règle de déplacement des pions : bien que tolérants, les individus déménageront si, parmi leurs voisins immédiats, un tiers ou moins sont de même couleur qu'eux. En sens inverse, ils seront satisfaits et ne déménageront pas si, parmi leurs voisins immédiats, strictement plus d'un tiers est de couleur identique. Cette règle du tiers peut sembler assez souple. On ne peut pas dire que les individus recherchent la ségrégation ; ce n'est qu'à partir du moment où chacun souhaite être majoritaire que la ségrégation est véritablement visée. En deçà, certaines minorités peuvent s'accepter et le mélange des deux communautés reste possible.

Dans la situation de départ alterné (avec coins vides), tous les individus sont satisfaits de leur voisinage. Schelling effectue alors une petite perturbation. Il commence par retirer au hasard 10 pions blancs et 10 pions noirs, puis il remet 5 pions au hasard, la couleur de chacun étant choisie aléatoirement (il y a donc finalement 45 pions et 19 cases vides). Cette perturbation suffit le plus souvent à engendrer un peu d'insatisfaction et les pions concernés seront alors déplacés au hasard vers des cases vides jusqu'à ce que l'on atteigne un nouvel équilibre où tous seront satisfaits en regard de la règle du tiers. Dans ces conditions, le résultat est surprenant : des quartiers noirs et des quartiers blancs apparaissent sans que personne ne le veuille réellement – du moins, à ce qu'il semble. Comme l'illustre la figure 1, il y a au final, après tout ce processus de migration, une forte ségrégation. Or ce n'est pas un résultat marginal. Comme le dit Schelling, réessayez plusieurs fois de jouer à ce jeu et vous aboutirez probablement à chaque fois à une forte ségrégation.

Figure 1 – Un exemple d'évolution vers la ségrégation

Situation de départ	Situation d'arrivée
. N B N B N B .	. B B . B B B B
N B . B N B . B	B B N B B B B B
B N . N B N B N	B N N N B . B B
N B N B . B N B	N . N B . B B B
B N B N B N B N	. N B B B N . B
N B N B . . N B	N . N B N N N .
B N . N B N B N	. N N N N N . N
. B N . N B N .	. N N N N N N N

(Les insatisfaits sont en gras)

2. Le démon de Schelling

Ce qui est particulièrement frappant dans ce modèle, c'est que tout le monde sait bien que l'ordre n'apparaît pas spontanément. Prenez l'échiquier, mettez-y tous les pions blancs d'un côté, tous les noirs de l'autre et agitez l'échiquier ; s'ils ne sont pas mélangés à la fin c'est un miracle. Dans un système fermé comme celui de Schelling le plus probable est le désordre, c'est-à-dire une certaine intégration des deux communautés. En fait, pour la physique statistique, un système soumis à une agitation aveugle peut atteindre n'importe quel macroétat logiquement envisageable, mais certains sont beaucoup plus probables parce que beaucoup plus de chemins y mènent (beaucoup plus de microétats y correspondent), et parfois tellement plus que les autres macroétats ne sont en réalité que théoriques.

Le modèle de Schelling défie justement cette pente vers le plus probable – le principe d'entropie. Il est vrai que le processus de réarrangement des pièces n'est pas aveugle, or on sait depuis Maxwell que dans ce cas l'ordre peut croître. L'exemple pris par Maxwell revient ici à ceci : un démon campe sur la frontière séparant l'échiquier en deux ; au départ les pions noirs et blancs sont répartis au hasard des deux côtés mais le démon ne laisse passer que les pions noirs d'un côté et que les pions blancs de l'autre ; dès lors, après avoir mis en mouvement ces pions aléatoirement, de l'ordre aura été créé – toutes les pions blancs se retrouvant bloqués d'un côté de la frontière et tous les noirs de l'autre. Une certaine quantité d'information gérée par le démon a permis de défaire le plus probable, le mélange. Il est donc clair qu'un apport d'information ou d'énergie permet à un système d'évoluer vers du moins probable, mais seulement en raison de cet apport.

Schelling utilise aussi une certaine dose d'information. Il n'en fait pas mystère, mais y voir un effet pervers consiste à prétendre que cette information n'est a priori pas suffisante pour expliquer la ségrégation obtenue après migration et que ce qu'il y a en plus est justement le

fruit d'un effet pervers ou de système. En fait, c'est ce point précis qui apparaît contestable. Conformément à ce que l'on peut attendre par application du principe d'entropie, l'ordre obtenu est au contraire tout simplement le résultat de l'activité de tri d'un « démon de Schelling » qui, en l'occurrence, ne fait que traduire plusieurs biais incorporés dans le modèle et que nous allons chercher à mettre en évidence.

3. Approche statistique de la ségrégation collective selon la tolérance individuelle

À cette fin, la première question que l'on doit se poser est celle de savoir quelle est la ségrégation probable pour une contrainte (un seuil de tolérance individuelle) donnée. Plus la tolérance diminue, moins il y a d'arrangements géographiques possibles et plus les situations à ségrégation haute deviennent probables. Il est donc nécessaire d'estimer le niveau de ségrégation auquel on doit s'attendre selon toute probabilité pour ne pas confondre cette probabilité avec un éventuel effet pervers. Une telle estimation suppose de se donner un indicateur du degré de ségrégation d'une distribution donnée. Et, de ce point de vue, il est aujourd'hui parfaitement établi que l'entropie, telle que définie par Shannon (1948) en théorie de l'information (en suivant bien sûr la définition qu'en donne Boltzmann en thermodynamique), mesure de manière pertinente et fiable (Kapur & Kesavan, 1992) le degré de désordre d'un système. Elle s'écrit ici comme suit :

$$H = -\frac{1}{N_{tot} \ln 2} \sum_{i,j} \left[\frac{C_{ij}}{N_{ij}} \ln \left(\frac{C_{ij}}{N_{ij}} \right) + \frac{N_{ij} - C_{ij}}{N_{ij}} \ln \left(\frac{N_{ij} - C_{ij}}{N_{ij}} \right) \right]$$

N_{tot} étant le nombre de pions sur l'échiquier ayant des voisins (c'est-à-dire non isolés), N_{ij} le nombre de pions dans le voisinage du pion [ij] (celui-ci inclus) et C_{ij} le nombre de pions de même couleur que le pion [ij] (celui-ci encore inclus). Cette entropie H étant rapportée dans la formule ci-dessus à son maximum, elle varie entre 0 (ségrégation totale) et 1 (mélange parfait). Pour se donner un indicateur de ségrégation (S), il suffit de retrancher H à 1 :

$$S = 1 - H$$

Cet indice S de ségrégation varie de 0 pour le mélange parfait à 1 pour la ségrégation totale. Par souci d'exactitude, nous avons également calculé un autre indice, noté S' , qui prend en compte le fait que dans un quartier de, par exemple, 5 individus, la situation de mélange parfait (2,5 pions noirs et 2,5 blancs) est évidemment impossible. Pour remédier à ce

problème, il faut modifier l'étalonnage en fonction de la parité du nombre d'individus logés dans un quartier. S' est alors calculé en remplaçant dans la formule donnant S le facteur $\ln(2)$ du dénominateur – qui correspond en fait à un $\ln(1/2)$ et étalonne l'entropie sur 1 quand le mélange est exactement de 50%-50% – par un facteur variable suivant le nombre d'habitants dans le quartier, mais étalonnant à 1 la situation la plus proche possible du mélange parfait (par exemple la situation 2 pions blancs et 3 noirs, ou l'inverse, dans les quartiers à 5 habitants). Nous verrons cependant un peu plus loin qu'en pratique cette nuance n'entraîne qu'à des différences négligeables, mais il fallait s'en assurer.

Comment maintenant estimer le niveau de ségrégation auquel on doit statistiquement s'attendre pour une contrainte donnée ? Comme le montrent certains travaux en physique ou mathématiques, la méthode analytique est délicate. En physique, les modèles dits de « verres de spins » (*Ising Spin Models*) étudient les changements de phase de système magnétique où existent des interactions locales entre spins, ce qui rapproche fortement ces modèles de celui de Schelling. Or, à l'heure actuelle, il n'existe pas de solution analytique de ces modèles, même dans des cas relativement simples. En mathématiques, les modèles de champs de Markov aléatoires (*Random Markov Fields*), que l'on peut également rapprocher du modèle de Schelling, n'offrent pas davantage de solutions analytiques. En fait, une des approches les plus fructueuses passe par la méthode de Monte Carlo, à partir de simulations informatiques répétées.

Il s'agit avec cette méthode de dériver une statistique sur les échiquiers de Schelling en produisant des millions de simulations, et d'étudier les caractéristiques de cette statistique. L'objectif est de produire la statistique de la ségrégation S ou S' en fonction du seuil de tolérance individuelle. On saura ainsi quelles sont les chances d'obtenir par hasard un échiquier où tous les individus sont satisfaits de leur voisinage *pour un seuil donné*. Le tableau 1 donne le résultat pour 100 millions d'échiquiers tirés au hasard dans les conditions définies par Schelling.

Tableau 1 – Statistique sur 100 millions d'échiquiers tirés au hasard

<i>Seuil observé</i>	<i>Occurrences</i>	<i>Ségrégation S</i>	<i>Ségrégation S'</i>	<i>1^{er} décile</i>	<i>Médiane</i>	<i>95^{ème} centile</i>	<i>99^{ème} centile</i>
0	97006013	0,15	0,14	0,09	0,15	0,25	0,31
1/8	90866	0,17	0,16	0,10	0,17	0,29	0,34
1/7	663409	0,17	0,15	0,09	0,16	0,28	0,33
1/6	1285585	0,16	0,15	0,09	0,15	0,27	0,33
1/5	815005	0,16	0,15	0,09	0,15	0,27	0,34
1/4	134513	0,17	0,16	0,09	0,16	0,29	0,36
2/7	3415	0,21	0,20	0,12	0,20	0,34	0,42
1/3	1194	0,25	0,24	0,15	0,23	0,40	0,44

Note : Décile, médiane et centiles sont calculés sur la ségrégation S.

Lecture : Sur 100 millions de tirages, 1194 échiquiers sont composés d'individus ayant tous au moins 1/3 de voisins identiques et, en outre, au moins un de ces individus a exactement 1/3 de voisins identiques. La ségrégation S moyenne de ces échiquiers est de 0,25.

Le premier enseignement de ces simulations est qu'il est quasiment impossible d'obtenir par hasard un échiquier respectant un seuil de satisfaction strictement supérieur à 1/3 (c'est-à-dire le seuil choisi par Schelling). Au bout de 100 millions de tirages, nous n'en avons obtenu aucun. Et nous n'en avons toujours trouvé aucun même après 200 millions de tirages. Sans surprise, la seconde loi de la thermodynamique est vérifiée ! Les situations les plus probables correspondent aux fortes entropies, c'est-à-dire aux échiquiers où la ségrégation est la plus faible. Dans 97% des échiquiers, un individu au moins n'a aucun voisin semblable et la ségrégation *S* vaut en moyenne 0,15. Ensuite, le cas le plus probable est celui où l'individu le moins satisfait n'a qu'un individu semblable sur six voisins. La ségrégation monte alors à 0,16. Et ainsi de suite.

Si l'on imagine maintenant un échiquier de Schelling où les pions déménagent de manière aléatoire, qu'ils soient satisfaits ou non, et ce sans arrêt prématuré du processus, nous pouvons en déduire sa ségrégation en moyenne temporelle (qui est aussi la moyenne sur la statistique précédente – la statistique de l'espace des phases – en vertu du principe ergodique). De la même manière, nous pouvons connaître l'ampleur des fluctuations. Le brassage continu maintiendra selon toute probabilité le seuil d'exigence minimal observé au sein de l'échiquier au niveau de zéro, mais de temps en temps, apparaîtront quelques fluctuations. À raison d'un échiquier différent toutes les secondes, nous verrons ainsi l'exigence minimale observée augmenter jusqu'à 1/3 environ une fois toutes les 83 752 secondes, c'est-à-dire à peu

près une fois par jour. En revanche, il y a peu de chances que même au bout de 3 ans, un échiquier ayant une exigence minimale strictement supérieure à $1/3$ apparaisse.

La méthode de Monte Carlo ne nous permet donc pas de connaître la ségrégation pour des seuils supérieurs strictement à $1/3$. En revanche, nous pouvons aisément calculer la ségrégation moyenne des échiquiers qui respectent au moins un seuil donné. Il suffit d'effectuer une moyenne pondérée par le nombre d'occurrences des ségrégations correspondant aux échiquiers qui ont des exigences minimales égales ou supérieures au seuil fixé. Le tableau 2 en donne les valeurs.

Tableau 2 – Ségrégation S moyenne en fonction du seuil minimal toléré

<i>Seuil minimal</i>	0	$1/8$	$1/7$	$1/6$	$1/5$	$1/4$	$2/7$	$1/3$
Ségrégation	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,22	0,25

4. Simulations du jeu de Schelling

Ayant établi le cadre statistique du modèle de Schelling, il nous faut à présent procéder à des simulations du jeu qui lui sert d'appui. Cela doit permettre de mesurer deux choses. Tout d'abord, évidemment, la ségrégation finale S . Mais également, la tolérance réelle des individus dans ce modèle. En effet, la présentation par Schelling de son modèle est trompeuse. Il nous présente le seuil de tolérance individuelle comme une variable continue alors qu'il s'agit d'une variable discrète, ce qui bouleverse l'interprétation du modèle. Prenons le cas où un individu a 3 voisins. Comment se traduit alors concrètement le désir d'un individu d'avoir plus d'un tiers de voisins semblables à lui-même ? Par le rejet des situations où, sur ses trois voisins, aucun ou un lui ressemble. Il n'accepte que les situations où deux voisins ou plus sont de sa couleur. Autrement dit, il veut faire partie de la majorité. Il rejette $0/3$, $1/3$ et accepte uniquement $2/3$, et $3/3$. On peut toujours dire qu'il est prêt à accepter 34 %, en fait dans les cas discrets d'application concrète, comme un individu ne peut évidemment pas avoir par exemple 1,6 voisins, cela signifie qu'en réalité son niveau *minimum* d'intolérance est de $2/3$. Ce calcul peut bien sûr être fait pour chaque nombre possible de voisins de 1 à 8. Par exemple, dans le cas de Schelling où le seuil est de plus de $1/3$, l'intolérance minimale réelle correspond à : 1 voisin semblable au moins parmi 1 voisin en tout, 1 semblable au moins parmi 2, 2 semblables au moins parmi 3, 2 semblables au moins parmi 4, 2 semblables parmi 5, 3 parmi 6, 3 parmi 7 et, enfin, 3 parmi 8. Les proportions minimales acceptées sont donc les

suivantes : 1/1, 1/2, 2/3, 2/4, 2/5, 3/6, 3/7 et 3/8 (le numérateur indiquant le nombre minimum de voisins identiques et le dénominateur le nombre total de voisins). On peut facilement établir cette série de proportions minimales réellement acceptées pour tout seuil d'intolérance fixé dans le continu (entre 0 et 1). Cela permet pour un seuil donné de calculer l'intolérance minimale moyenne qui est *effectivement* en cause dans le modèle en pondérant chacune de ces proportions par le nombre de fois où elle a été rencontrée dans une simulation. Dans la suite de cette étude, nous appellerons *intolérance effective* le résultat de ce calcul.

Mais avant d'en venir à ce calcul, il faut aussi observer que les conditions initiales du modèle de Schelling constituent un autre élément important pour comprendre ce qui en résulte. Ces conditions sont tout à fait exceptionnelles : elles sont toujours très proches de l'alternance parfaite et, par conséquent, cela relativise fortement la généralité du modèle. Soyons clairs : c'est une faute méthodologique de tirer des conclusions générales d'un modèle dont les conditions initiales sont biaisées. Bien entendu, dans la mesure où nous discutons du modèle de Schelling, nous avons effectué des simulations en partant des mêmes conditions initiales que lui. A proprement parler, après retrait des pions au hasard, il s'agit d'un départ quasi alterné. Mais nous avons également mené des simulations en partant de conditions initiales tirées totalement au hasard (avec le même nombre de pions). Comme nous le verrons, la comparaison des deux est riche d'enseignements.

Tableau 3 – Résultats des simulations du jeu de Schelling avec départs quasi alternés ou au hasard

<i>Départ</i>	<i>Au hasard</i>		<i>Quasi alterné</i>	
	Intolérance	Ségrégation	Intolérance	Ségrégation
Seuil minimal				
0[0,252	0,205	0,232	0,094
1/8 (0,125)	0,257	0,209	0,238	0,095
1/7 (0,143)	0,274	0,221	0,260	0,095
1/6 (0,167)	0,305	0,249	0,293	0,102
1/5 (0,200)	0,347	0,309	0,333	0,132
1/4 (0,250)	0,403	0,401	0,390	0,229
2/7 (0,286)	0,420	0,456	0,411	0,324
1/3 (0,333)	0,502	0,579	0,495	0,570
3/8 (0,375)	0,507	0,592	0,501	0,600
2/5 (0,400)	0,549	0,664	0,544	0,671
3/7 (0,429)	0,566	0,701	0,563	0,710
1/2 (0,500)	0,688	0,844	0,685	0,848
4/7 (0,571)	0,704	0,876	0,701	0,875

Note : Les calculs sont effectués pour chaque seuil sur 2000 simulations pour le départ quasi alterné (avec coins vides) pour reprendre les conditions initiales de Schelling et également sur 2000 simulations pour le départ au hasard. Il y a 45 pions sur chaque échiquier. Le seuil minimal indique ici, au sens de Schelling, le seuil que les individus se doivent de dépasser *strictement*. On ordonne dans ce tableau par ordre croissant tous les seuils minimaux possibles de 0 à 57 %.

5. Les biais du modèle de Schelling

5.1. Une intolérance individuelle réelle largement sous-estimée

Le tableau 3 présente les résultats des simulations correspondant à différents seuils d'exigence individuelle dont on peut dès à présent tirer deux observations.

1) L'intolérance réelle (« discrète ») est toujours largement supérieure à ce que suggère un seuil choisi dans le continu, tel que présenté par Schelling.

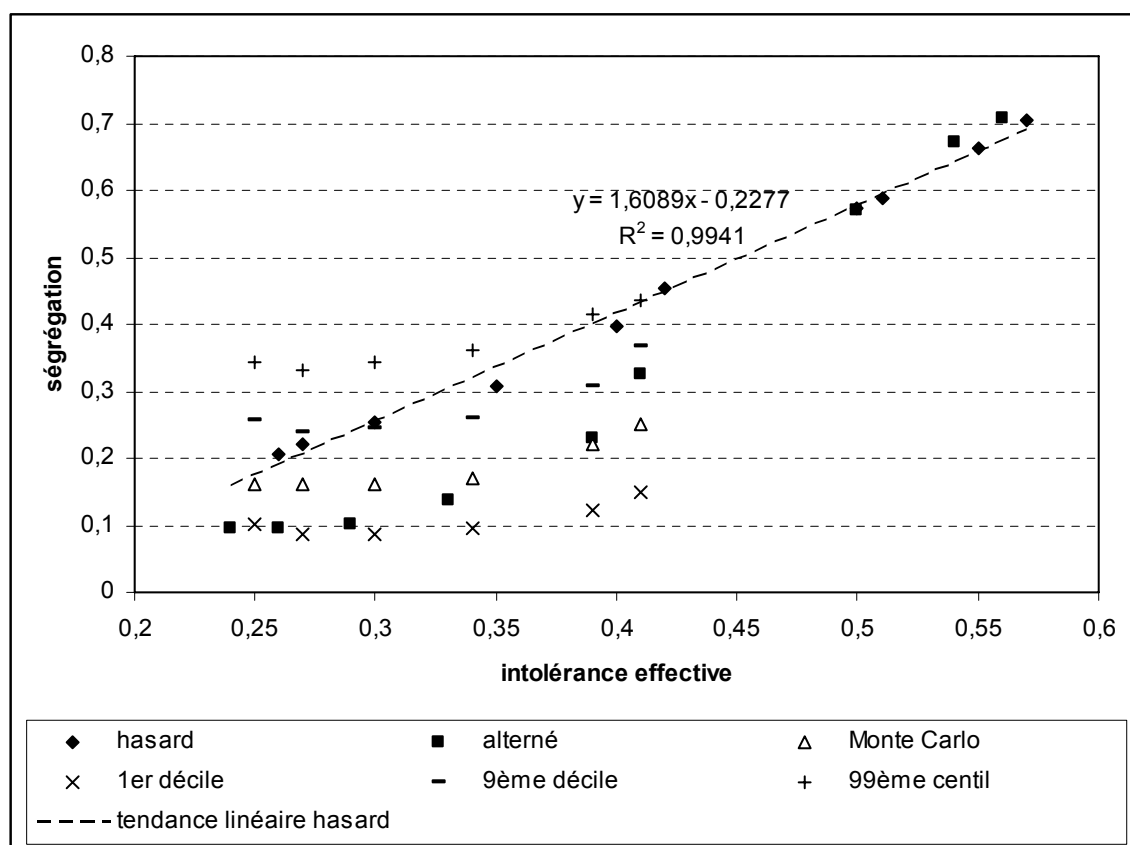
2) Dans le cas du seuil de plus d'un tiers, cette intolérance est en réalité de l'ordre de 50 % ; juste un peu en dessous (0,495) pour des départs quasi alternés et un peu au-dessus (0,502) pour des départs au hasard (la différence entre ces deux derniers chiffres tient à un biais de *path dependency* sur lequel nous reviendrons). À de tels niveaux, la ségrégation observée est le résultat logique et il n'est nullement justifié de parler ici d'effet pervers. Avec un niveau d'exigence individuelle aussi élevé, qui ne s'observe pas sous l'effet du hasard (cf. tableau 1 ou 2) et qui traduit une préférence ou une quasi préférence de chacun pour vivre dans un environnement où il est majoritaire, il ne faut pas s'étonner que cet environnement atteigne une ségrégation forte et hors norme relativement au résultat issu du hasard présenté au tableau 1. On se donne une règle fortement ségrégationniste et donc on retrouve cette forte ségrégation à l'arrivée. À l'inverse, lorsque l'intolérance *effective* est d'à peu près $1/3$, la ségrégation (qui vaut 0,13 pour les départs quasi alternés et à peu près 0,25 pour les départs au hasard) n'est pas « surprenante » par comparaison avec ce que l'on obtient sous le seul effet du hasard (cf. tableau 1 ou 2).

La conclusion est donc claire : en présentant la règle du tiers dans le continu, on masque une intolérance individuelle en réalité beaucoup plus élevée (environ un demi) et qui agit comme un « démon de Schelling » triant les pions pour construire le niveau de ségrégation atteint. Ce niveau n'a rien d'étonnant compte tenu de la règle *réelle* de tri (hors norme relativement au hasard) que l'on se fixe. Lorsque cette règle réelle est au contraire effectivement aux alentours du tiers, le tri apparaît fort logiquement impuissant à produire plus de ségrégation que ce que l'on constate sous le seul effet du hasard.

À seuil fixé, il faut d'ailleurs remarquer que l'on peut faire varier la tolérance réelle en modifiant la densité des pions sur l'échiquier. Avec une densité plus faible, il y a plus de place pour des quartiers à faible nombre de voisins. Avec une densité plus forte, ces quartiers sont forcément moins nombreux. Ainsi, avec la règle du tiers, les rapports tolérés sont au minimum, pour les petits quartiers, de $1/1$, $1/2$ et $2/3$ alors qu'ils ne sont que de $3/6$, $3/7$ et $3/8$ dans les grands quartiers. Pour un seuil donné, on augmente donc mécaniquement

l'intolérance individuelle effective et par voie de conséquence la ségrégation collective en diminuant la densité de population sur l'échiquier. À titre d'exemple, pour le seuil d'un tiers (exclu), avec 40 pions sur l'échiquier, l'intolérance réelle vaut, dans le cas de 2000 départs quasi alternés 0,510 et la ségrégation 0,590, au lieu respectivement des 0,495 et 0,570 observés pour les 45 pions du tableau 3. Dans le cas de 2000 départs au hasard, l'intolérance effective vaut, toujours avec 40 pions, 0,522 et la ségrégation 0,594, au lieu des 0,502 et 0,579 du tableau 3. Penser que le modèle de Schelling a quelque rapport avec la réalité suppose donc d'admettre que, pour un même seuil de tolérance individuelle, une société rurale est toujours collectivement plus ségréguée qu'une société urbaine ou que l'intolérance individuelle effective et la ségrégation qui en découle sont inversement proportionnelles à la densité de population. Il ne s'agit pas là à proprement parler d'un biais mais d'une hypothèse implicite qui peut être contredite empiriquement et qui, en tous cas, permet de modifier les résultats obtenus quant à la ségrégation. C'est pourquoi, pour discuter le modèle de Schelling, nous nous sommes astreints à toujours suivre au plus près sa présentation (celle qu'il donne en 1978) et notamment à conserver la même densité.

Figure 2 – Ségrégation en fonction de l'intolérance effective



Ceci étant, avant de poursuivre l'examen du modèle, il est intéressant de commenter en détails l'ensemble des résultats auxquels nous sommes parvenus jusqu'ici. La figure 2, qui les résume, appelle plusieurs remarques.

On notera tout d'abord que sur l'intervalle $[0,24 ; 0,41]$ d'intolérance effective, qui est la plage où une mesure de la ségrégation par la méthode de Monte Carlo a été possible, la ségrégation moyenne après déménagements – que l'on parte d'un échiquier quasiment alterné ou tiré au hasard – demeure dans l'intervalle de confiance à 10% pour la borne inférieure et à 1% pour la borne supérieure. Quand l'intolérance effective se maintient en deçà de 41%, la ségrégation finale après déménagements ne peut pas être véritablement qualifiée de ségrégation « hors norme ». On ne peut en revanche se prononcer sur la normalité de ce qui se passe pour des intolérances effectives allant de 42% à 50%. Nous verrons cependant un peu plus loin, en étudiant la dispersion de cette variable, que cet intervalle d'intolérance effective ne se rencontre guère car les spécificités du jeu (l'ampleur des sauts discrets d'un seuil à l'autre) aboutissent le plus souvent à une intolérance soit inférieure, soit supérieure.

De toute manière les résultats font clairement apparaître que la méthode de Schelling introduit des biais puisque, même en multipliant le nombre de simulations pour établir nos statistiques, les moyennes obtenues par Monte Carlo, par Schelling avec départ quasi alterné ou encore par Schelling avec départ au hasard sont significativement différentes. La ségrégation obtenue par Schelling pour des départs au hasard est toujours plus haute, même pour des intolérances effectives basses, et plus cette intolérance s'approche des 50%, plus il est manifeste que la ségrégation finale est supérieure à ce que prévoit Monte Carlo. En revanche, la ségrégation obtenue par Schelling pour des départs quasi alternés est significativement plus basse que celle de Monte Carlo et il faut que l'intolérance effective atteignent la plage située entre 36% et 40% pour que leur ségrégation se rejoignent. Enfin, pour des intolérances effectives supérieures à 50%, il n'y a plus de différences entre les résultats, que l'on parte d'un échiquier quasiment alterné ou tiré au hasard.

5.2. Un principe ergodique inapplicable et une dépendance aux conditions initiales

Pour étudier plus avant les biais en jeu, il faut tout d'abord revenir sur les hypothèses sous-jacentes au principe ergodique. Le résultat que nous avons obtenu par Monte Carlo est une moyenne de la ségrégation sur tous les états possibles de l'échiquier (pour une contrainte de seuil minimum fixée). Si l'on suppose que les pions sur l'échiquier sont animés de mouvements aléatoires en très grands nombres, et respectant les contraintes données, alors on peut appliquer le principe ergodique, qui consiste à dire que la moyenne temporelle de la

ségrégation observée sur l'échiquier tend vers la moyenne calculée sur tous les états possibles. L'égalisation des moyennes repose sur l'idée que ce mouvement aléatoire des pions conduit *à partir d'un certain laps de temps* à parcourir tous les possibles sans plus en privilégier aucun, du fait des mouvements aléatoires.

Or dans le cas présent, les règles du jeu de Schelling rendent le principe ergodique inapplicable pour deux raisons. Tout d'abord, le jeu peut s'interrompre rapidement et, dès lors, la ségrégation finale n'a pas le temps de converger vers sa cible (la ségrégation calculée par Monte Carlo). Le principe ergodique revient en fait à négliger les conditions initiales en considérant que la marche aléatoire finit par effacer toute spécificité liée au point de départ : seul compte, dans ces conditions, le poids du hasard. Ici, au contraire, il y a dépendance aux conditions initiales (*path dependency*) puisque l'échiquier final ressemble encore beaucoup, à quelques aménagements près, à l'échiquier initial. C'est à l'évidence ce qui se passe pour les simulations sur des échiquiers ayant un point de départ quasiment alterné. Pour des seuils faibles, il suffit de quelques déménagements pour satisfaire tout le monde et la ségrégation finale demeure particulièrement basse et proche de la ségrégation de départ. C'est pourquoi les résultats pour le départ alterné sont aussi proches du 1^{er} décile de la distribution de Monte Carlo.

5.3. Un processus de migration sélectif qui construit un phénomène de nucléation

Un dernier biais s'ajoute encore à ceux qui viennent d'être évoqués. D'un côté, nous supposons une marche aléatoire au sein de tous les échiquiers respectant une contrainte de seuil donné, et nous en déduisons une distribution cible pour la ségrégation. De l'autre, nous effectuons une marche sélective à partir d'échiquiers qui ne satisfont pas le seuil, et nous poursuivons cette marche jusqu'à obtenir une position satisfaisante pour chaque pion. Il y aurait convergence entre les ségrégations finales si, une fois atteint un échiquier satisfaisant par la méthode de Schelling, il continuait à y avoir un mouvement aléatoire de pions sous la seule contrainte de ne produire aucun insatisfait. Or ce n'est pas ainsi que se présente le modèle de Schelling. Une de ses hypothèses implicites est au contraire que les satisfaits ne déménagent jamais. C'est dire que le processus migratoire n'est pas simplement une marche sélective *a minima*, qui imposerait seulement d'aller d'une position insatisfaisante à une position satisfaisante par un chemin quelconque, c'est dans le même temps une marche sélective qui *impose* des mobilités potentiellement différentes entre les pions. Tout quartier totalement homogène a un potentiel nul de voir ses habitants déménager. Les physiciens parlent à ce propos de phénomènes de *nucléation*. Dans un mélange, des noyaux homogènes

vont pouvoir se former si l'énergie de liaison entre des pions semblables (l'énergie exigée pour créer un quartier homogène) est plus faible que la pression exercée par les pions de couleur opposée. Dans ce cas, les noyaux homogènes se mettent à croître jusqu'au moment où ils rencontrent une pression trop forte. Dans le cas de Schelling, le coût de formation d'un quartier homogène est nul ; tout quartier homogène ne peut donc que croître, et non décroître. On notera que ces phénomènes de nucléation sont des phénomènes cinétiques qui expliquent des écarts par rapport à l'équilibre thermodynamique. Ce sont des états transitoires ou des états en équilibre métastable (c'est-à-dire des états en équilibre précaire, une petite fluctuation peut suffire pour ramener le système à l'équilibre stable). Le modèle de Schelling provoque ainsi un équilibre métastable à l'aide d'une règle dont la portée reste implicite, à savoir cette règle qui consiste à ne jamais faire déménager des satisfaits. Une telle règle revient, pour utiliser une image, à conseiller à un cuisinier de mélanger une pâte à crêpe sans toucher aux grumeaux et à trouver surprenant que les grumeaux n'aient pas disparu mais aient grossi !

Ce biais explique que la ségrégation finale des échiquiers obtenus par la méthode de Schelling pour un départ au hasard soit un peu supérieure à la ségrégation d'équilibre (Monte Carlo). Toutefois, comme nous le disions, pour des intolérances effectives en deçà de 50%, les résultats ne sont pas complètement hors norme. Ainsi pour une intolérance de 40%, la ségrégation est encore inférieure au 99^{ème} centile de la distribution de Monte Carlo.

6. Une relation linéaire entre intolérance individuelle effective et ségrégation collective

Tous les biais qui viennent d'être relevés ont pour effet de construire de toute pièce le niveau de ségrégation atteint par le modèle de Schelling, mais un autre point mérite attention. La thèse de l'effet pervers consiste en fin de compte à soutenir que les effets d'une certaine dose d'intolérance sont disproportionnés au regard des résultats en termes de ségrégation. Or nous observons exactement le contraire. Pour le cas des départs au hasard, la ségrégation finale est presque exactement proportionnelle à l'intolérance effective ($R^2 = 0,99$). Pour le cas des départs quasi alternés, la courbe semble avoir une allure un peu plus logistique ($R^2 = 0,98$). Ce n'est cependant qu'un léger avantage devant l'ajustement linéaire ($R^2 = 0,96$) et nous verrons que même ce résultat ne tient pas si l'on effectue l'ajustement non plus sur les données agrégées (les moyennes de chaque groupe de simulations) mais sur les données issues directement de toutes les simulations.

Ceci dit, il faut souligner que le soi-disant « effet » de Schelling n'est pas dû à un phénomène spécial – telle une bifurcation catastrophique – à partir d'un seuil modéré d'intolérance ; l'impression d'effet est simplement induite par la sélection d'échiquiers de départ dotés d'une alternance presque trop parfaite pour être réaliste. Il ne tient donc pas à une ségrégation trop forte au-delà d'un certain seuil mais, tout au contraire, à une ségrégation trop faible en deçà de ce seuil. Comme il a été dit, la conclusion de Schelling tient, notamment, à un choix biaisé au niveau des conditions initiales du jeu.

Ceci apparaît clairement lorsque l'on considère les graphiques de dispersion de la ségrégation en fonction de l'intolérance effective. Dans le cas de départs tirés au hasard (cf. figure 3), on n'observe pas de rupture du niveau de ségrégation à partir d'une intolérance donnée. On retrouve en revanche la relative absence, constatée précédemment, de points ayant une intolérance effective entre 44% et 48%. Ces données sont assez bien ajustées par une droite ($R^2 = 0,85$) et un peu moins bien par une fonction logistique ($R^2 = 0,83$) ; or c'est une telle fonction qui modélise communément les phénomènes de diffusion et, pour le cas présent, les phénomènes de « contagion » d'une insatisfaction modérément intolérante. Le meilleur modèle, et la meilleure explication, consiste donc toujours à dire que la ségrégation résultante est simplement proportionnelle à l'intolérance individuelle.

Dans le cas des départs quasi alternés (cf. figure 4), on observe un net tassement de la distribution pour de faibles exigences individuelles en matière de ségrégation. On peut distinguer ici trois plages d'intolérances. La première va, approximativement, de 20% à 35%. La ségrégation y est toujours très faible du fait de la dépendance aux conditions initiales. La troisième plage commence au-delà de 50% ; la ségrégation y est toujours très élevée et très au-delà de la ségrégation de départ. Les déménagements au cours des simulations sont suffisamment nombreux pour rendre négligeable l'influence des conditions initiales sur le résultat final. C'est pourquoi le nuage de points se superpose ici très largement à celui des départs au hasard. La première et la troisième plage d'intolérance relèvent donc de dynamiques très différentes et les ségrégations finales ne sont tout simplement pas comparables : il n'y a pas de recouvrements entre les deux distributions de ségrégation. Enfin, on observe une plage intermédiaire, aux alentours de 40 %. Ici la distribution de la ségrégation est particulièrement large au point de recouvrir quasiment l'ensemble des deux distributions précédentes. Mais cela ne suffit pas pour mener une analogie entre la dynamique présente et les phénomènes de bifurcation en mathématique et en physique, où un système dynamique oscille entre deux attracteurs étranges. En effet, il y a bifurcation dans ces théories lorsque d'infimes variations des conditions initiales aboutissent à des changements de très

grandes ampleurs dans les résultats. Or il n'y a rien de tel ici, comme l'observe d'ailleurs déjà Zhang (2004) ou Young (1998) en parlant de simulations « stochastiquement stables ». Dans cette zone intermédiaire, la sensibilité aux conditions initiales est plus faible puisque la distribution de la ségrégation est similaire à celle observée pour les départs au hasard. Comme on le voit graphiquement, il y a seulement plus de cas pour lesquels la ségrégation est basse du fait d'un reste d'influence des départs alternés. Autrement dit, même à ces niveaux d'intolérances, il y a encore des cas où l'on atteint une position satisfaisante en s'écartant à peine de la position quasiment alternée de départ. L'ajustement de cette distribution par une droite est d'ailleurs correct ($R^2 = 0,89$), et en tous cas meilleur que celui obtenu avec une fonction logistique ($R^2 = 0,87$). Même ici, la ségrégation reste proportionnelle à l'intolérance individuelle.

Figure 3 – Diagramme de dispersion de la ségrégation collective et de l'intolérance individuelle pour des départs au hasard

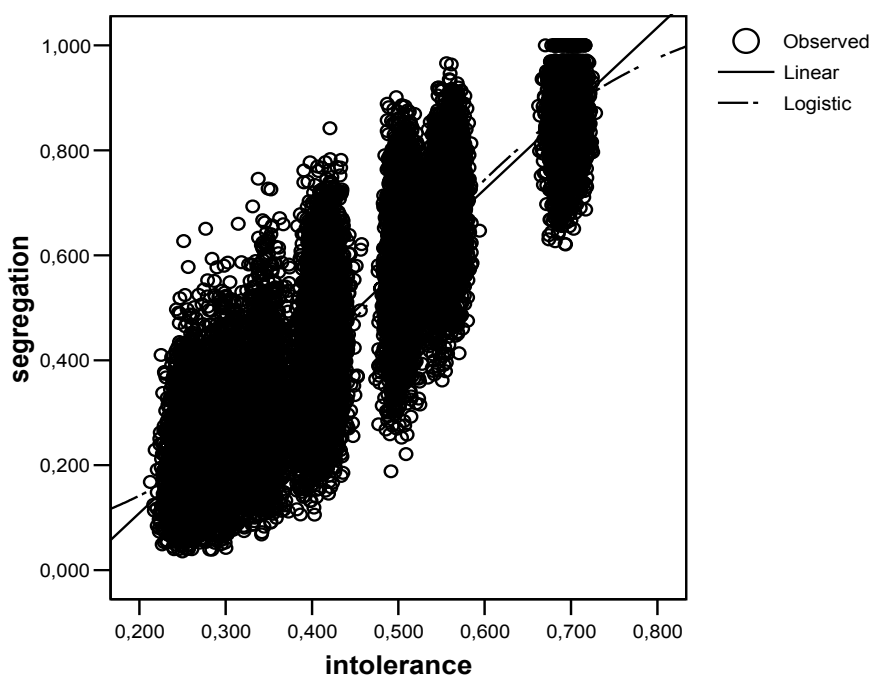
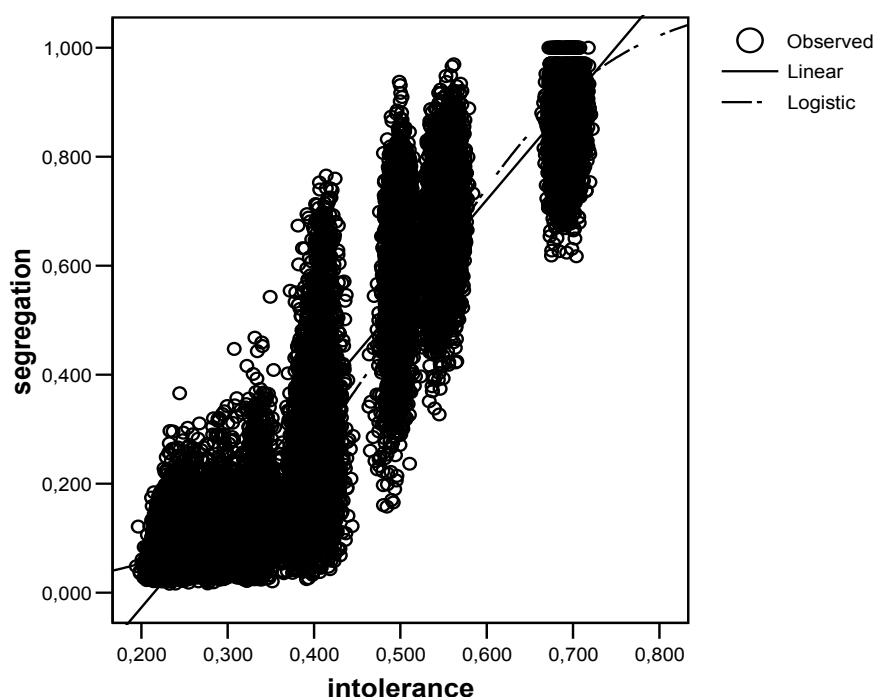


Figure 4 – Diagramme de dispersion de la ségrégation collective et de l'intolérance individuelle pour des départs quasi alternés



Lecture : Pour les départs aléatoires comme pour les départs quasi alternés, 2000 simulations ont été effectuées pour chacun des seuils listés au tableau 3. Chaque point représente le résultat d'une simulation en matière d'intolérance individuelle effective et de ségrégation finale (S) de l'échiquier.

7. Au-delà du modèle de Schelling

La théorie de Schelling a été largement acceptée et reprise dans différents domaines telles les sciences économiques, la théorie des jeux ou la sociologie urbaine. De nombreuses variantes en ont été proposées, pour conclure le plus souvent aux mêmes effets pervers. La plupart de ces travaux ne sont toutefois pas exempts de critiques et, sans prétendre à l'exhaustivité, nous en pointerons ici quelques-unes.

Commençons par une tentative intéressante d'élargir la taille du voisinage considéré pour décider de la satisfaction (Laurie & Jaggi, 2003). Les résultats sont prévisibles. D'un côté, cet élargissement permet de réduire l'ampleur des sauts discrets et, donc, de tester des modèles où le seuil théorique continu nous trompe moins sur l'intolérance effective. Du coup, les fluctuations autour de la position moyenne vont se réduire. Ainsi, s'il y a toujours autant de pions noirs que de pions blancs sur l'échiquier, et que l'on élargit le voisinage jusqu'à l'ensemble de l'échiquier, il est bien évident que tout le monde est satisfait jusqu'au seuil exact de 50%, et insatisfait au-delà. Dans les conditions du modèle de Schelling, un pion a 44

voisins et, au pire, seulement 19 sont de couleur identique (le rapport faisant 43 %). Il est donc clair qu'avec un seuil de satisfaction de 33 %, il ne se passe tout simplement rien. Il faut d'ailleurs observer qu'avec une exigence supérieure à 43 %, aucun équilibre n'est possible. Dans un cas intermédiaire où le voisinage représenterait un quart de l'ensemble, le résultat est tout aussi prévisible. Tous continueront d'être satisfaits pour un seuil de 33 %.

D'un autre côté, il est bien évident qu'en augmentant la taille des voisinages, on augmente la « communauté de destins » et si, par exemple, un pion blanc est insatisfait dans un large quartier, cela signifie en fait que tous les pions blancs de ce quartier sont insatisfaits en même temps, et que tous vont déménager jusqu'à vider complètement le quartier. Un tel phénomène ne peut pas être qualifié de pervers : c'est le fruit logique, parfaitement prévisible, d'une règle collective. Ces deux effets (stabilité accrue pour des seuils bas et fuite massive dans des quartiers pour des seuils hauts) expliquent les résultats de Laurie et Jaggi.

Ces deux auteurs mesurent la taille du voisinage selon une méthode particulière. La distance (R) entre deux pions est égale au nombre de lignes et de colonnes qui sépare deux pions. Autrement dit, on compte le nombre de cases qui sépare deux pions en se déplaçant selon les lignes ou les colonnes de l'échiquier mais non les diagonales (la distance entre deux pions est : $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$). Ils montrent alors qu'il ne se passe quasiment rien pour un seuil de 30% quand le voisinage est composé de tous les pions à moins de 3 cases du pion central ($R=3$) ; et les déménagements sont encore plus rares pour $R=5$. En revanche, pour un seuil de 50%, qui force logiquement la ségrégation, les auteurs observent que plus on augmente la taille des voisinages, plus les zones homogènes sont larges. Ainsi, pour $R=1$ ou $R=3$, la ségrégation est déjà élevée et les zones sont déjà homogènes, mais les surfaces de contact entre régions de couleurs opposées sont encore nombreuses. Pour $R=5$, elles sont plus rares ; les frontières deviennent rectilignes car plus rien ne peut dépasser ; il ne peut plus y avoir de débordements d'une région sur une autre. Une fois que l'on a compris le rôle de chacun des paramètres, tous les cas abordés dans leur article s'expliquent sans peine.

Ceci dit, Laurie et Jaggi n'ont pas repéré qu'en abaissant le rayon du voisinage à 1 – cas où le pion central a tout au plus 4 voisins – les effets de sauts discrets jouent à plein, et il est simplement absurde de parler d'un seuil de 33% alors que l'intolérance effective est forcément supérieure à 50%. Plus généralement, de nombreux auteurs oublient purement et simplement que la ségrégation est un résultat logique – et donc en rien pervers – quand tout le monde veut faire partie de la majorité.

Young (1998) déploie ainsi de gros efforts pour retrouver sur un modèle simplifié de Schelling des conclusions qui ne méritent aucun calcul. Au lieu de considérer un échiquier, il

considère un cercle où sont disposées des pièces noires et blanches (sachant en outre qu'il n'y a pas de cases vides). Chacune a deux voisins et aucune pièce ne veut être entourée de deux pièces de couleurs différentes d'elle. Young démontre alors deux choses : (1) que dans la position finale, où tous sont satisfaits, chaque pièce a au moins un voisin de sa couleur ; (2) que moins il y a de frontières entre pièces noires et blanches, plus la position est ségréguée. Sous des apparences de paradoxes, ce sont parfois des tautologies que l'on égrène au fil d'études techniques.

Conclusion

Pour conclure, deux points doivent tout d'abord être soulignés. En premier lieu, le modèle de Schelling est souvent cité comme cas exemplaire du paradigme de l'individualisme méthodologique. Voici un cas où des individus rationnels produisent un résultat collectif qui dépasse les visées de chacun. Il faut toutefois être précis. L'individu schellingien n'est pas rationnel. Dès qu'il est insatisfait, il part, mais il part n'importe où et, éventuellement, pour pire ! En somme, nous sommes confrontés à un individu qui, trouvant que son loyer est trop élevé pour son revenu, peut néanmoins décider de s'installer dans un quartier où les loyers sont encore plus chers. Ce n'est plus seulement au « *rational fool* » cher à Sen (1977) que nous avons affaire, mais à un véritable *irrational fool*.

Par ailleurs, le sociologue ne peut manquer d'observer que la ségrégation urbaine a d'autres causes. La principale est certainement liée au revenu, mais il ne faut pas exclure, les réseaux sociaux, la réputation de l'école du quartier ou la politique des agences immobilières, certaines répercutant à 100% les préjugés des propriétaires sur les locataires éventuels, etc. Schelling et ses épigones en sont conscients. Et pourtant, la seule leçon semble être que la société peut être ségréguée sans que personne ne soit vraiment raciste. Une telle conclusion n'est pas valable pour toutes les raisons que nous avons exposées. Mais en outre, la place que l'on accorde au supposé effet pervers est bien trop surévaluée, comme si l'on pouvait oublier les principaux facteurs sociaux ou économiques de la ségrégation. Avant de conclure à un supplément d'ordre causé par un racisme modéré, il faudrait déjà contrôler ces autres facteurs et se demander s'il reste encore, après tout cela, un supplément à expliquer.

Si beaucoup ont été persuadés qu'il y avait davantage dans ce modèle que les résultats triviaux auxquels il aboutit, cela tient à ce que deux tautologies s'y télescopent pour former un parallogisme : oui, de petites exigences sur son voisinage créent de l'ordre (un peu) ; oui, si tous souhaitent être majoritaires alors il n'y a pas de minorités possibles et la ségrégation est

élevée ; mais non, la ségrégation collective n'est pas en décalage par rapport à ce que l'on peut attendre compte tenu des lois du hasard et de ce que chacun souhaite effectivement. Le modèle de Schelling ne permet pas de conclure que de grands ghettos naissent d'innocentes décisions.

Une exigence individuelle faible conduit à une ségrégation collective faible et une exigence forte conduit à une ségrégation forte. Le lien entre les deux est tout simplement linéaire. Les niveaux d'entropie atteints pour un seuil donné de satisfaction n'ont rien de surprenants en regard du hasard. Pour le dire autrement, le modèle de Schelling n'apporte pas la démonstration que le second principe de la thermodynamique est faux – conclusion à laquelle il faudrait pourtant bien se résoudre si ce modèle n'était pas biaisé. Le niveau de ségrégation constaté n'est pas le fruit d'un effet pervers, quel que soit le nom, d'ailleurs souvent impropre physiquement, qu'on lui donne : réaction en chaîne, masse critique, etc. Les décalages avec ce qui peut être attendu ne sont dus qu'aux biais du modèle, qui finalement agissent comme un véritable « démon de Schelling » triant les pions. Parmi ces biais, les principaux mis en évidence au cours de cette étude sont, rappelons-le, les suivants :

- Une règle fixant un seuil d'intolérance individuelle dans le continu mais qui, en s'appliquant seulement à des situations discrètes, sous-estime grandement l'intolérance effective dans ces situations. La règle du tiers de Schelling masque une intolérance hors norme relativement au hasard et conduit fort logiquement à la ségrégation collective hors norme qui va de pair. En revanche, lorsque l'intolérance *effective* est d'environ 33 %, la ségrégation ne diffère pas de ce que l'on obtient sous le seul effet du hasard.

- Un point de départ alterné très peu probable en regard d'un départ non biaisé ou au hasard et qui imprime longtemps sa marque sur le niveau de ségrégation obtenu.

- Un processus de migration qui interdit l'application du principe ergodique et engendre un biais de *path dependency*.

- Une migration asymétrique (les satisfaits ne déménagent jamais) qui construit de toute pièce un phénomène de nucléation (les quartiers homogènes ne peuvent que croître).

Si, au total, la ségrégation n'apparaît pas être, sous couvert d'un mystérieux effet de système, indépendante des volontés des acteurs, il faut donc, au lieu d'évacuer ces acteurs et leurs choix, se fonder sur eux pour véritablement comprendre, dans le cadre des facteurs sociaux et économiques pertinents, les phénomènes de ségrégation.

Bibliographie

- Kapur J. N., Kesavan H. K., 1992, *Entropy Maximisation Principles with Applications*, San Diego, CA, Academic Press.
- Laurie A. J., Jaggi N. K., 2003, Role of 'Vision' in Neighbourhood Racial Segregation: A Variant of the Schelling Segregation Model, *Urban Studies*, vol. 40, no. 13, 2687-2704.
- Schelling Th. C., 1971, Dynamic Models of Segregation, *Journal of Mathematical Sociology*, vol. 1, no. 2, 143-186.
- Schelling Th. C., 1978, *Micromotives and Macrobehavior*, New-York, NY, Norton ; tr. fr. 1980, *La tyrannie des petites décisions*, Paris, PUF.
- Sen A., 1977, Rational fools, A critique of the behavioral foundations of economic theory, *Philosophy and Public Affairs*, vol. 6, no. 4, 317-344.
- Shannon C. E., 1948, A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, Vol. 27 (July and October), 379-423 and 623-656.
- Young H. P., 1998, *Individual Strategy and Social Structure, An Evolutionary Theory of Institutions*, Princeton, NJ, Princeton UP.
- Zhang J., 2004, A Dynamic Model of Residential Segregation, *Journal of Mathematical Sociology*, vol. 28, no. 3, 147-170.