



**HAL**  
open science

## Croissance et division du travail

Xavier Ragot

► **To cite this version:**

Xavier Ragot. Croissance et division du travail. Annales d'Economie et de Statistique, 2003, 70, pp.77 - 106. hal-03475968

**HAL Id: hal-03475968**

**<https://sciencespo.hal.science/hal-03475968>**

Submitted on 11 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Croissance par Division du Travail

Xavier E. RAGOT \*

**RÉSUMÉ.** – Cet article présente un mécanisme de croissance fondé sur la seule division du travail, c'est-à-dire sur l'augmentation de la diversité des tâches. La division du travail a lieu à la fois au sein des entreprises et entre celles-ci. Le processus d'augmentation du nombre de tâches est rendue possible par l'augmentation du nombre d'entreprises. L'étude de la division optimale du travail montre que l'équilibre décentralisé n'alloue pas assez de ressources à la coordination du travail.

---

## Growth by Division of Labour

**ABSTRACT.** – This paper presents a growth model based on continuous increases in division of Labour. Division of Labour takes place within each firm. It raises the productivity of workers but it is limited by coordination costs. This division of labour generates innovation opportunities and allow for the introduction of new types of capital goods, which are produced by firms which divide work again. The continuous increase in the number of tasks performed within firms generates a balanced growth, because of the increase in the 'roundaboutness' of the production method. We show that the market equilibrium generates a balanced growth path and that it allocates to few resources to the coordination of division of labour.

---

\* Xavier RAGOT, DELTA, 48 Bd Jourdan 75014 Paris, France.

email : ragot@delta.ens.fr

L'auteur tient à remercier Robert BOYER, Régis BRETON, Fabrice COLLARD, ainsi que les deux rapporteurs anonymes pour les précieux conseils. Toute erreur restante est bien sûr de la seule responsabilité de l'auteur.

# 1 Introduction

---

Quelles sont les causes des gains de productivité globale des facteurs à long terme ? Les réponses à cette question ont donné lieu à différents modèles canoniques de croissance endogène, parmi lesquels le modèle de croissance endogène par externalité sur le stock de capital (ROMER [1986]), par accumulation de capital humain (LUCAS [1988]), par augmentation de la diversité des biens capitaux (ROMER [1990]) et enfin par augmentation de la qualité des biens dans un processus de destruction créatrice (AGHION et HOWITT [1992]). L'objet de cet article est de montrer que la division du travail, c'est-à-dire l'augmentation de la diversité des tâches, constitue un autre mécanisme de croissance de long terme. En effet, on présente un modèle dans lequel la croissance est portée par l'évolution endogène de la composition du facteur travail et, bien que la diversité des biens capitaux augmente, ceux-ci ne contribuent à la croissance de long terme que dans la mesure où ils incorporent différentes tâches.

Plus précisément, le mécanisme de croissance passe par la relation entre la division du travail au sein des entreprises, et la division du travail entre les entreprises, c'est-à-dire le fractionnement des tâches entre les entreprises. Bien que la première forme de division du travail soit essentielle, la croissance de long terme repose sur la différenciation des entreprises. La division du travail dans l'entreprise est le résultat d'un arbitrage entre les gains de productivité du travail issus de la division des tâches, et les coûts de coordination de la division du travail qui reposent sur la gestion de l'information et des conflits d'intérêt au sein de l'entreprise (COASE [1937], BECKER et MURPHY [1992], BOLTON et DEWATRIPONT [1994]). Une fois que l'entreprise a décidé sa division du travail, elle exprime une demande de travail pour assurer la réalisation de différentes tâches. De nouvelles entreprises peuvent alors fournir des biens qui se substituent aux travailleurs sur des tâches précises, ou en d'autres termes, peuvent mécaniser la division du travail des entreprises préexistantes. Ces nouvelles entreprises divisent aussi le travail, donnant lieu à leur tour à des opportunités d'introduction de nouvelles machines. Ce modèle accorde ainsi une place importante au mécanisme qui relie la division du travail et l'introduction de nouvelles machines ou de nouveaux outils, mécanisme que soulignait déjà Adam SMITH [1776] puis Alwyn YOUNG [1928]. Par ailleurs, ce modèle met en lumière l'aspect créateur du marché, souligné par KALDOR [1972], par la formalisation du mécanisme de création de nouvelles tâches, rendue possible par l'apparition d'opportunités d'investissement du fait de l'évolution de la division du travail. Le processus de croissance repose sur l'apparition continue de nouvelles tâches et de nouveaux biens capitaux. Des chaînes de biens capitaux se créent et s'allongent progressivement du fait de la mécanisation de la division du travail. Les gains de productivité de long terme reposent sur une succession d'innovations qui entraînent l'allongement continu des détours de production. Ce type d'innovations, de nature incrémentale (AMABLE [1995]), correspond à la vision du progrès technique de GILFILLAN [1970] : « une innovation importante est une perpétuelle addition de petits détails, n'ayant ni début ni fin, ni limites définissables. ».

Ce modèle appartient à deux types de littérature. Le premier est la littérature sur la croissance endogène. Plus particulièrement, il appartient à l'ensemble des travaux de croissance endogène sans effets de taille (KORTUM [1997], SEGERSTROM [1998], YOUNG [1998], WEITZMAN [1998], EICHER et TURNOVSKY [1999], JONES [1999], HOWITT [1999] entre autres, voir D'AUTUME [1998] et JONES [1999] pour une présentation générale). Cette seconde série de modèle de croissance endogène s'est développée à la suite des travaux de Jones [1995, 1999] qui a établi que les premiers modèles de croissance endogène ne permettaient pas de rendre compte de la croissance lorsque la taille de la population croît. Le modèle que l'on présente est un modèle de croissance semi-endogène, comme ceux de KORTUM [1997] et SEGERSTROM [1998] qui ont une croissance par tête positive si la taille de la population croît. Comme l'écrit WEITZMAN [1998], on peut caractériser cette littérature comme une tentative de compréhension de la boîte noire que constitue la fonction de production des innovations, qui a été introduite dans les modèles de croissance endogène pour comprendre une autre boîte noire que constituait « le progrès technique » dans les premières analyses de la croissance. L'apport de cet article est de se concentrer sur la genèse des opportunités d'innovation, laquelle repose sur la division du travail qui engendre de nouvelles tâches à mécaniser.

Le second type de littérature concerne l'ensemble des travaux macroéconomiques sur la division du travail (YANG et BORLAND [1991], BECKER et MURPHY [1992], KELLY [1997]). Cet article se distingue des modèles de YANG et BORLAND [1993] et de BECKER et MURPHY [1992], par le mécanisme de croissance : les premiers introduisent un mécanisme d'apprentissage par la pratique, alors que les derniers introduisent un mécanisme d'accumulation du capital humain. L'apport de ce modèle est de démontrer que ces mécanismes de croissance ne sont pas nécessaires lorsque l'on formalise le processus de création de nouvelles tâches. Enfin, KELLY [1992] montre dans un cas général que la conception de la croissance d'Adam SMITH engendre un processus discontinu de croissance avec effet de seuil. Ce modèle possède cette propriété sous la forme d'une trappe à pauvreté. Une taille du marché minimum est nécessaire pour permettre une croissance auto-entretenu. La modélisation de l'évolution endogène de la division du travail aboutit à un modèle de croissance endogène ne présentant pas d'effets de taille quant à la population. Le taux de croissance de l'économie dépend du taux de croissance de la population et non de sa taille, qui n'a qu'un effet transitoire sur le taux de croissance. L'étude de l'allocation du planificateur central montre que l'équilibre décentralisé conduit à un taux de croissance de long terme qui est optimal, mais à une dynamique transitoire non optimale, comme dans le modèle de SEGERSTROM [1998]. On montre par ailleurs que l'économie décentralisée alloue trop peu de ressources à la coordination de la division du travail.

Dans une première section, on modélise la division du travail dans une entreprise. La seconde section modélise l'apparition de nouvelles entreprises en équilibre partiel. La troisième section présente le modèle de croissance endogène. La dernière section étudie le programme du planificateur central. La conclusion résume les résultats. Les principaux résultats sont présentés sous la forme de lemmes et de propositions dont les démonstrations sont renvoyées en annexe afin de faciliter l'interprétation économique des mécanismes.

## 2 Division du travail au sein des entreprises

---

L'utilité des ménages dépend linéairement de leur consommation. Leur utilité intertemporelle s'écrit

$$u = \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^{\tau} c_{\tau}$$

avec  $\beta = (1 + r)^{-1}$ , où la constante  $r$  est le taux de préférence pour le présent.  $c_{\tau}$  est la consommation totale de la population. À la période  $t$ , celle-ci est de taille  $L_t$  et croît à un taux  $u$  constant. Cette spécification linéaire de l'utilité intertemporelle est similaire à celle d'AGHION et HOWITT [1992]. Elle détermine la valeur du taux d'intérêt réel,  $r$ , mais laisse indéterminé le montant de l'épargne, ce qui permet de concentrer l'analyse sur la dynamique de la production.

La production du bien final dépend d'un continuum de longueur  $m$  de biens intermédiaires. La fonction de production du bien final est à rendements décroissants

$$(1) \quad Y = \int_{i=0}^m q_i^{\frac{s-1}{s}} di$$

En prenant le prix du bien final comme numéraire, et en notant  $P_i$  le prix du bien intermédiaire  $i$ , le programme du producteur du bien final est  $\max_{q_i} \int_{i=0}^m q_i^{\frac{s-1}{s}} di - P_i q_i$ , ce qui donne la fonction de demande inverse pour les  $m$  producteurs de biens intermédiaires

$$(2) \quad P(q) = \left( \frac{s-1}{s} \right) q^{-\frac{1}{s}}$$

Chaque firme qui produit un bien intermédiaire choisit sa division du travail. Si une entreprise produit avec une seule tâche, sa fonction de production à rendements constants prend la forme  $f(x) = x$ , où  $x$  est la quantité de travail allouée à cette tâche. La quantité produite  $q$  est donc simplement  $q = x$ . La tâche unique peut être divisée en un continuum de tâches de longueur  $n$ . Le paramètre  $n$  sera constant et exogène dans tout le modèle. Chaque tâche se divisera donc de la même manière. La production est maintenant une fonction du temps alloué à chaque sous-tâche,  $x_i$  avec  $1 \leq i \leq n$  :

$$q = n^{\gamma - \frac{1}{s-1}} \left( \int_{i=0}^n x_i^{\frac{s-1}{s}} di \right)^{\frac{s}{s-1}}$$

Les différentes tâches se combinent avec une élasticité de substitution constante. Suite aux travaux de BÉNASSY [1996], on sait que  $\gamma$  est la mesure correcte de l'influence de la division du travail sur la productivité du travail. En effet, lorsque le travail n'est pas divisé, la quantité produite par une unité de temps est 1. Après la division du travail, la production la plus grande est obtenue en allouant  $1/n$  unité de travail à chaque tâche. La quantité produite par une unité de temps est alors  $n^\gamma > 1$ . Les gains sont d'autant plus grands que  $n$  est grand et que  $\gamma$  est grand. La division du travail est alors dite à l'ordre 1.

Cette forme de division du travail modélise en même temps la subdivision d'une tâche en  $n$  tâches différentes, et l'apparition d'un détour de production. Pour reprendre la métaphore de YOUNG [1928], si la tâche consiste à planter un bout de métal, ce que l'on faisait avec des moyens sommaires, la division en sous-tâches peut être de fabriquer un marteau, et de transformer le bout de métal en clou, *etc...* Les nouvelles tâches ne sont pas forcément incluses dans la tâche que l'on divise. Ainsi, si l'on accepte la conception de YOUNG de la division du travail, comme incorporation dans de nouveaux objets, le terme de « subdivision du travail » peut être trompeur, car dans la division du travail apparaît de nouvelles tâches qui n'existaient pas auparavant.

La division du travail à l'ordre 2 consiste en la division de chaque tâche  $x_i$  en un continuum de  $n$  tâches. Cela peut être représenté formellement par

$x_i = n^{\gamma - \frac{1}{s-1}} \left( \int_{k=0}^n x_{i,k}^{\frac{s-1}{s}} dk \right)^{\frac{s}{s-1}}$ . La fonction de production devient

$q = n^{2\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left( \int_{i=0}^n \int_{k=0}^n x_{i,k}^{\frac{s-1}{s}} di dk \right)^{\frac{s}{s-1}}$ . La division du travail à l'ordre

$p$  est la division de chaque tâche en sous tâches  $p$  fois. La fonction de production dépend alors de  $n^p$  termes, qui sont les temps de travail alloués aux  $n^p$  tâches, et

est égale à  $q = n^{p\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left( \int_{i_1=0}^n \dots \int_{i_p=0}^n x_{i_1, \dots, i_p}^{\frac{s-1}{s}} di_1, \dots, di_p \right)^{\frac{s}{s-1}}$ . En utilisant un seul indice

$$(3) \quad q = n^{p\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left( \int_0^{n^p} x_i^{\frac{s-1}{s}} di \right)^{\frac{s}{s-1}}$$

Plus que l'indexation des tâches, c'est la taille de l'ensemble des tâches,  $n^p$ , qui est importante pour l'entreprise. En effet, comme les tâches interviennent symétriquement dans la fonction de production, la question n'est pas quelles tâches réaliser, mais plutôt combien de tâches sont réalisées<sup>1</sup>.

La division du travail augmente la productivité du travail, mais elle ne peut se faire sans coûts. Pour COASE [1937] la fonction d'organisation de l'entrepreneur connaît des rendements décroissants. L'économie de l'information montre que ces coûts sont induits, entre autre, par le problème de l'acquisition et de la circulation de l'information dans l'entreprise (BOLTON et

1. La symétrie du modèle rend donc l'optimisation sur  $p$  rigoureuse dans le cadre de cette réindexation particulière.

DEWATRIPONT [1994]). Les coûts d'organisation et de gestion de l'information sont représentés par une fonction croissante de la division du travail de la forme  $h(n+1)^p$ . L'intuition économique de cette expression est la suivante : pour chaque tâche effectuée, un temps mort  $h$  est nécessaire pour acquérir les informations sur le contenu du travail. De plus, un ensemble de tâches supplémentaires, de mesure fixée à 1, et de même durée  $h$  est nécessaire pour coordonner les autres tâches. Ainsi, à chaque division, la taille de l'ensemble des tâches consacrées à l'organisation est multipliée par  $n+1$ . Comme chacune d'elle dure un temps  $h$ , on retrouve l'expression  $h(n+1)^p$ . Le modèle ne dépend pas de cette hypothèse précise : n'importe quel coût de coordination de la forme  $hm^p$ , avec  $m > n$  aboutit aux mêmes résultats.

En notant  $p_1$  la division interne du travail des entreprises qui vendent les biens intermédiaires, le profit d'une entreprise au sein du continuum est

$$\pi(p_1, x_i) = P(q)q - \int_0^{n^{p_1}} x_i w \, di - hw(n+1)^{p_1} \text{ où } 0 \leq i \leq n^{p_1}$$

avec la fonction de production (3) et la fonction de demande inverse (2). Le salaire horaire  $w$  est commun à tous les salariés. La maximisation du profit  $\max_{p, x_i} \pi(p_1, x_i)$ ,  $0 \leq i \leq n^p$  détermine les demandes de travail  $x_i$  pour chaque tâche et la profondeur  $p_1$  de la division du travail

$$(4) \quad x_i = w^{-s} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{2s} n^{p_1(\gamma(s-1)-1)}$$

Le temps de travail alloué à chaque tâche est donc le même. La maximisation en fonction de la division interne du travail donne, en utilisant l'équation précédente,

$$(5) \quad \left( \frac{n+1}{n^{\gamma(s-1)}} \right)^{p_1} = \frac{1}{h} \gamma \left( \frac{s-1}{s} \right)^{2s} w^{-s} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

Les conditions de second ordre imposent  $\gamma(s-1)\ln n < \ln(n+1)$ . Le terme de gauche de l'équation (5) est donc une fonction croissante de  $p_1$ . La division du travail est une fonction décroissante du coût du travail  $w$  et du coût de division du travail  $h$ .

Les deux équations précédentes permettent de calculer le ratio  $\tau$  du nombre de travailleurs consacrés à la production sur le nombre de travailleurs consacrés à l'organisation dans chaque entreprise :

$$\tau = \frac{n^{p_1} x}{h(n+1)^{p_1}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

Ainsi plus la division du travail augmente la productivité, c'est-à-dire plus  $\gamma$  est grand, plus la quantité de travail alloué à la coordination et la gestion de l'information est importante. Les équations (4), (3) et (2) permettent de calculer le prix

$$P = \frac{s}{s-1} n^{-\gamma p_1} w$$

Le prix d'un bien intermédiaire est proportionnel au coût unitaire du travail. Il dépend négativement de l'effet de la division du travail sur la productivité,  $\gamma$ . Les gains de productivité se répercutent ainsi en une baisse des prix. Le terme  $\frac{s}{s-1}$  représente le pouvoir de monopole du producteur intermédiaire.

MARSHALL [1920] pose une distinction célèbre entre les rendements internes à l'entreprise et les rendements externes à l'entreprise mais internes au secteur industriel. Nous avons jusqu'à présent modélisé les premiers. La section suivante modélise les seconds. Ceux-ci sont engendrés par la modification de la division du travail à l'échelle macroéconomique, liée à l'apparition de nouvelles entreprises.

### 3 Division macroéconomique du travail

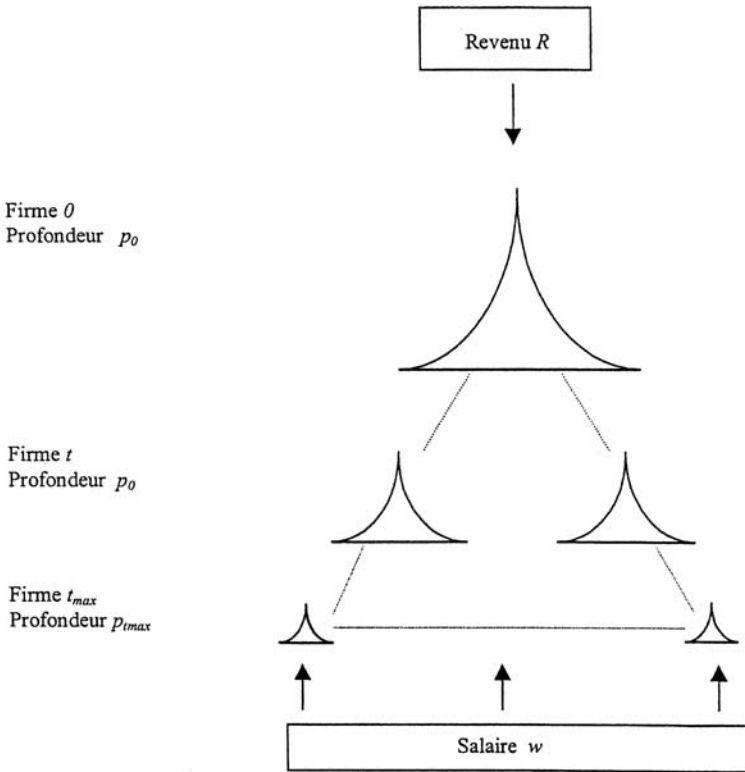
---

L'hypothèse de ce modèle est que la division interne du travail, modélisée dans la section précédente, engendre des opportunités de profit qui permettent à de nouvelles entreprises de vendre des biens capitaux. Suivant Adam SMITH, les opportunités de profits correspondent à la possibilité de vendre des biens réalisant les différentes tâches de l'économie qui étaient effectuées auparavant par des travailleurs. Les nouvelles entreprises divisent elles-mêmes le travail en leur sein, engendrant ainsi d'autres opportunités de profits. Ainsi des entreprises apparaissent successivement pour produire de nouveaux biens capitaux, allongeant les détours de production. En ce sens, les nouvelles entreprises produisent des machines qui incorporent les tâches réalisées auparavant par les salariés. Le travail n'est pas seulement divisé au sein des entreprises, mais aussi entre les entreprises par l'intermédiaire de la structure des prix relatifs. Pourquoi ce fractionnement de la production en entreprises différentes ? La réponse renvoie à l'existence de coûts de coordination et de rendements croissants du fait de la division du travail dans l'entreprise : l'utilisation de la coordination par les prix permet aux entreprises d'acheter des biens sans se soucier de leur production, ce qui économise les coûts de coordination, comme le remarque COASE [1937]. L'existence de coût de coordination tend donc à fractionner la production en entités distinctes qui se coordonnent par le système de prix. L'existence de rendements croissants issus de la division du travail tend à rassembler la production en des entités plus importantes. L'équilibre de ces deux tendances façonne la structure industrielle. Le modèle s'éloigne ici des analyses de COASE [1937] qui n'introduit pas de rendements croissants pour justifier l'existence des entreprises, mais un coût d'utilisation du système de prix.

Cette section montre qu'en équilibre partiel, c'est-à-dire lorsque le salaire  $w$  et le revenu  $R$  sont fixés, la structure de l'économie se développe de la manière suivante : la division du travail des entreprises décroît avec la profondeur de la division externe du travail et celle-ci s'arrête à une valeur  $t_{\max}$  dont on étudie les propriétés. La figure 1, schématise la structure industrielle. Les entreprises sont représentées par des triangles stylisés équilatéraux dont la



FIGURE 1  
*Taille des firmes à revenu fixé*



longueur de la base représente la mesure de l'ensemble des tâches réalisées dans l'entreprise. Ainsi plus une triangle est petit, plus la division du travail est petite.

Une entreprise est dite de rang  $t$  dans la division externe du travail lorsque le nombre de biens capitaux entre l'entreprise et l'entreprise produisant le bien final est  $t$ . L'entreprise produisant le bien final est donc de rang 0. Si les entreprises de rang  $t$  sont les dernières, les entreprises qui se créent pour vendre des biens capitaux aux entreprises de rang  $t$  sont de rang  $t + 1$ . Le processus d'apparition de nouvelles entreprises est le suivant : si la division interne du travail des entreprises de rang  $t$  est  $p_t$ , celles-ci produisent par définition avec des travailleurs exécutant un continuum  $n^{p_t}$  de tâches<sup>2</sup>. Pour chaque firme de rang  $t$  un continuum de  $n^{p_t}$  nouvelles entreprises apparaissent. Chacune d'elles produit un bien capital qui remplace les travailleurs réalisant une tâche précise. Les entreprises de rang  $t$  produisent maintenant avec des biens capitaux et économisent leurs coûts d'information. Les entreprises produisant les biens capitaux sont toutes différentes et vendent un bien réalisant une tâche précise. Les biens intermédiaires sont entièrement consommés dans la période.

2. Nous pouvons indiquer les firmes par leur seule place dans la division externe du travail, car nous montrons qu'elles ont le même programme et choisissent donc la même division interne du travail et les mêmes quantités.

Ce modèle s'éloigne ici de modèles de croissance par R&D. En effet, ceux-ci feraient dépendre le nombre de nouvelles entreprises seulement de l'effort de recherche. Le modèle ne formalise pas ce mécanisme pour étudier le mécanisme de genèse des opportunités d'innovation. L'hypothèse que toutes les opportunités de profits sont satisfaites est utilisée en première approximation pour simplifier l'exposition. On suppose donc que le profit des entreprises est la rémunération de l'effort de recherche et développement.

Lorsque des entreprises de rang  $t + 1$  apparaissent, les entreprises de rang  $t$  qui produisaient avec du travail achètent maintenant des biens capitaux qui sont moins chers que le coût du travail. Le prix des inputs des entreprises de rang  $t$  diminue, elles modifient alors leur prix, changeant ainsi le prix des inputs des entreprises de rang  $t - 1$ . De proche en proche, l'ensemble de la structure des prix relatifs se modifie après l'arrivée de nouvelles entreprises.

Ainsi, pour représer une firme dans la division du travail de l'économie, nous avons besoin de deux indices. Le premier indice  $l$  situe le rang de l'entreprise dans la division externe du travail. C'est un indice statique qui parcourt la structure productive. Le second indice  $t$  décrit la profondeur de la division externe du travail. Nécessairement  $l \leq t$ . On montre plus loin que le premier indice  $l$  détermine la demande vue par une firme, et que le second indice  $t$  détermine le prix de ses inputs.

$P_{l,t}$ ,  $\pi_{l,t}$ ,  $q_{l,t}$  sont respectivement le prix, le profit et la production des entreprises de rang  $l$  lorsque la profondeur totale de la division du travail est  $t$ . Ainsi  $P_{0,t}$ , qui est le prix que voit le consommateur final, est utilisé comme numéraire et est donc égal à 1.  $p_{l,t}$  est la division interne du travail des entreprises de rang  $l$  lorsque la division externe du travail est  $t$ . Enfin, la fonction de demande inverse qu'anticipent les entreprises de rang  $l$  est notée  $P_l(q)$ .

Ainsi les entreprises de rang  $l$  lorsque la division externe du travail est  $t$  maximisent leur profit, qui s'écrit

$$(6) \quad \pi_{l,t} = P_l(q_t)q_t - \int_0^{n^p} P_i q_i^d di$$

La fonction de production est maintenant

$$(7) \quad q_t = n^p \left( \gamma - \frac{1}{s-1} \right) \left( \int_0^{n^p} q_i^{\frac{s-1}{s}} di \right)^{\frac{s}{s-1}}$$

La maximisation du profit se fait seulement sur les quantités  $q_i$  car l'entreprise ne peut plus diviser le travail avec ses machines. La fonction de production n'utilise donc plus de travail. Cette hypothèse n'est pas essentielle et est utilisée pour simplifier les calculs. L'hypothèse importante est que, une fois que les entreprises produisent avec des biens intermédiaires, la division du travail est déterminée par l'utilisation de ces biens. En d'autres termes, une fois que la division du travail est mécanisée, elle ne peut plus évoluer substantiellement. Cette hypothèse, qui est partiellement vérifiée dans le cadre d'une division du travail fordienne et taylorienne (BOYER et SCHMEDER [1990]), implique que le modèle ne traite pas directement de l'évolution de la division du travail au sein des entreprises à long terme. Le gain est une simplification analytique qui permet de concentrer l'analyse sur la dimension externe de la division du travail et d'étudier l'influence de celle-ci sur la croissance.

L'hypothèse d'irréversibilité de la division du travail et le programme des entreprises, qui est statique, induit une sous-optimalité dans le modèle. En effet, la causalité qui relie le nombre de tâches et le nombre d'innovations à la période suivante, n'est pas prise en compte par les agents. Ce choix de modélisation n'est pas seulement fondé sur la simplification mathématique. En effet, l'introduction de nouveaux biens capitaux qui allongent la division externe du travail est une innovation, dont l'effort, qui n'est pas modélisé ici, est rémunéré par le profit de l'entreprise. Le nombre de tâches réalisées dans une entreprise apparaît donc comme une mesure du nombre d'opportunités d'innovation. L'hypothèse théorique du modèle est alors que le mécanisme de genèse des opportunités d'innovation n'est pas connu des agents et apparaît donc comme une externalité. L'entrepreneur ne connaît pas les tâches qui peuvent être mécanisées au moment où il divise le travail. Comme il a été expliqué plus haut, l'hypothèse que toutes les opportunités d'innovation sont satisfaites à chaque période, est une simplification nécessaire pour obtenir des résultats analytiques simples, mais n'est pas une hypothèse de nature économique. Les lecteurs curieux de connaître les résultats du modèle si les agents connaissent le processus d'innovation au moment où ils choisissent la division du travail peuvent se reporter à l'étude du programme optimal qui intègre précisément cette causalité. Dès lors, la seule différence entre le programme décentralisé et le programme optimal repose sur l'hypothèse de concurrence monopolistique, qui engendre une sous-optimalité du programme décentralisé.

La résolution de ce programme donne la demande des entreprises de rang  $l$  pour la production des entreprises de rang  $l + 1$  lorsque leur prix est  $P$ , donc aussi la fonction de demande inverse  $P_{l+1}(q)$ . La détermination des fonctions de demande inverse se fait par récurrence. Cette méthode de résolution du modèle permet de mettre en évidence l'évolution de la structure des prix relatifs avec la division du travail.

LEMME 1 : *Les entreprises de rang  $t \geq 1$  voient une fonction de demande inverse de la forme :*

$$(8) \quad P_t(q) = n \left( \gamma^{\frac{s-1}{s}} - \frac{1}{s} \right)^{\chi_{t-1}} \left( \frac{s-1}{s} \right)^t q^{-\frac{1}{s}}$$

avec  $\chi_t = \sum_{k=1}^t p_k$ . Elles choisissent une division du travail  $p_t$

$$(9) \quad \left( \frac{n+1}{n} \right)^{P_t} = \frac{1}{h} \gamma \frac{\ln n}{\ln(n+1)} w^{-s} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t}$$

La fonction de demande vue par les nouvelles entreprises est la fonction de demande vue par les entreprises de rang directement inférieur, multipliée par une constante  $\frac{s-1}{s}$  inférieure à 1, ce qui est la cause de la décroissance de la division interne du travail avec le rang de l'entreprise. Comme dans la section précédente, elle provient de la concurrence monopolistique des entreprises. L'équation (9) montre que, conformément à l'intuition, la division du travail à

chaque rang,  $p_t$ , est une fonction croissante des gains de productivité qu'elle peut engendrer,  $\gamma$ , et une fonction décroissante des coûts de coordination mesurée par  $h$  et du salaire horaire  $w$ . Le lemme précédent permet de déterminer l'ensemble de la structure des prix relatifs et de son évolution avec la division du travail.

LEMME 2 : *Les prix décidés par les entreprises obéissent à l'équation de récurrence suivante, où  $t + 1$  est la profondeur de la division externe du travail.*

$$(10) \quad P_{l,t+1} = \left( \frac{s}{s-1} \right) n^{-\gamma p_l} P_{l+1,t+1}$$

*Si l'entreprise est la dernière, le prix qu'elle choisit est :*

$$(11) \quad P_{t+1,t+1} = \left( \frac{s}{s-1} \right) n^{-\gamma p_{t+1}} w$$

*L'allongement d'une unité de la profondeur du travail modifie le prix que fixe une entreprise de rang  $l$  de la manière suivante*

$$P_{l,t+1} = \left( \frac{s}{s-1} \right) n^{-\gamma p_{t+1}} P_{l,t}$$

Ce lemme étudie l'évolution des prix en fonction de la division externe du travail de deux manières différentes. Tout d'abord, on étudie la relation entre les prix fixés par des entreprises de rang consécutifs,  $l$  et  $l + 1$ , sans que de nouvelles entreprises apparaissent, équation (10). La différence de prix est d'autant plus grande que la division du travail dans l'entreprise de rang  $l$  est grande : sa productivité augmente alors, ce qui se traduit par une baisse du prix de sa production par rapport au prix de ses inputs.

La dernière équation montre l'évolution du système de prix lorsque la division externe du travail augmente. Les nouvelles entreprises de rang  $t + 1$  induisent une baisse du coût des inputs pour les entreprises de rang  $t$  d'un rapport  $P_{t+1,t+1}/w < 1$ . Cette baisse des prix se propage dans toute l'économie. En effet, toutes les entreprises réduisent leur prix du même rapport  $P_{l,t+1}/P_{l,t}$  qui est égal à la baisse initiale du coût des inputs  $P_{t+1,t+1}/w$ .

L'équation (11) montre que la division du travail dans une firme ne peut être inférieure à une constante  $p_{\min}$  définie par  $\left( \frac{s}{s-1} \right) n^{-\gamma p_{\min}} = 1$ , soit

$$p_{\min} = \frac{\ln \left( \frac{s}{s-1} \right)}{\gamma \ln n}$$

En effet si  $p_t < p_{\min}$  alors le prix choisi par l'entreprise est supérieur au salaire horaire  $w$  et aucune firme n'achète alors le bien produit.

L'équation (10) montre que la condition  $p_t < p_{\min}$  implique que le prix décidé par une firme est inférieur au prix de ses inputs. Le prix est d'autant

plus faible que la division interne du travail est grande. En effet, plus celle-ci est importante, plus les gains de productivité sont importants. L'entreprise a alors intérêt à augmenter sa production, donc à baisser ses prix, pour vendre plus. Ainsi, la différence de prix entre un input de rang  $t$  et un input de rang  $t + 1$  est une fonction croissante de la division du travail dans les entreprises de rang  $t$ . Comme conséquence, le prix des biens capitaux est une fonction croissante de leur rang dans la division externe du travail. Plus leur rang est grand, plus leur demande est faible car les entreprises exploitent de moins en moins les rendements croissants de la division du travail.

PROPOSITION 1. *Dans le cas général, la division interne du travail choisie par les entreprises de rang  $l$ ,  $p_l$  décroît avec  $l$ . La division externe du travail s'arrête à une profondeur  $t_{\max}$  qui est une fonction décroissante du coût de division du travail  $h$  et du coût du travail  $w$ .*

Comme la demande rencontrée par chaque firme est décroissante avec son rang dans la division externe du travail, et comme la division interne du travail est une mesure de l'exploitation des rendements croissants, on trouve naturellement que la division interne du travail décroît avec le rang des entreprises. Comme la division du travail ne peut être inférieure à  $p_{\min}$  la division externe s'arrête car il n'y a plus d'opportunité de profits. Les sens de variation sont intuitifs. Une augmentation des coûts du travail et du coût de division du travail diminuent les rendements croissants, donc le choix de division interne de chaque entreprise et finalement la profondeur de la division externe du travail  $t_{\max}$ .

Comme le bien final a été choisi comme numéraire, une diminution de  $w$  peut être une diminution du salaire réel ou une augmentation du prix nominal du bien final. Ainsi, si la demande adressée à l'économie augmente le prix de vente du bien final augmente ce qui équivaut dans le modèle à une baisse de  $w$ . La division verticale du travail  $t_{\max}$  augmente alors. On retrouve ainsi le résultat de STIGLER [1951] qui relie le degré de désintégration verticale et la demande adressée à un secteur. En effet, pour celui-ci, la croissance d'une branche industrielle se mesure à la vitesse de désintégration verticale. Inversement, une branche industrielle en déclin se concentre verticalement. Ici, une branche industrielle qui voit une demande importante a une division externe du travail plus développée. La création de nouveaux biens capitaux a lieu avec la création de nouvelles tâches. Le modèle est donc conforme à l'intuition de SMITH qui relie division du travail, ici interne et externe, et taille du marché.

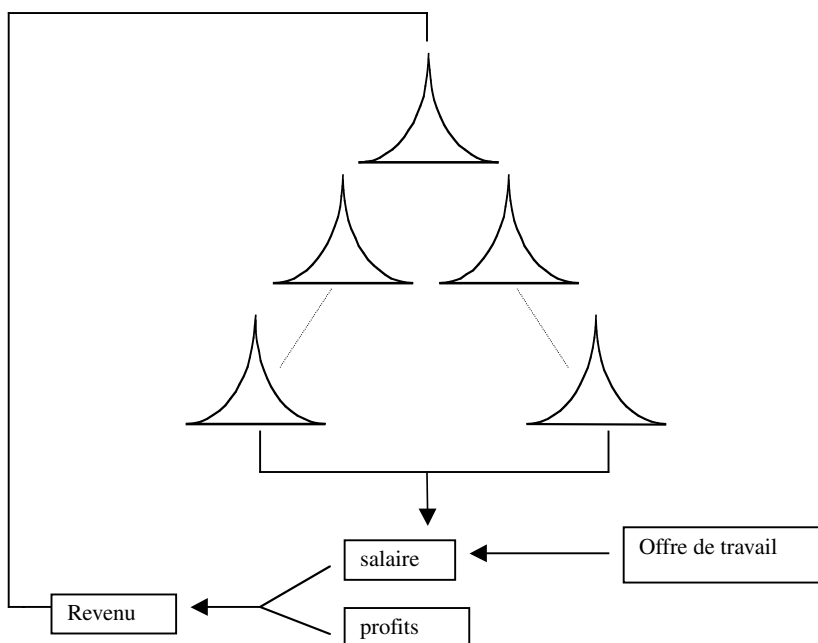
Nous avons jusqu'à présent modélisé l'articulation entre division interne et division externe du travail en considérant le salaire constant. Cependant, le processus de division du travail modifie la demande de travail de l'économie. On s'attend donc à voir le salaire évoluer. L'étude de l'influence de la taille de la population sur les salaires mène au modèle de croissance endogène.

# 4 Division du travail et Croissance endogène

En équilibre partiel, la section précédente montre que la taille des entreprises décroît avec la division externe du travail. Lorsque l'on rend le salaire endogène, la taille des entreprises tend vers une constante non nulle, lorsque le taux de croissance de la population est positif. Cette augmentation continue des détours de production permet un taux de croissance par tête positif. La figure 2 montre maintenant l'évolution de l'économie.

FIGURE 2

## *Mécanisme de croissance auto-entretenu*



Nous supposons que tout le revenu, la somme des profits et des salaires, est dépensé à chaque période. Cette hypothèse n'a pas de conséquence sur le bien-être car les ménages sont indifférents entre consommer et épargner au taux d'intérêt réel en vigueur. À chaque période  $t$  de nouvelles entreprises apparaissent, ce qui modifie le coût des inputs que voit les autres entreprises, donc les prix fixés par les entreprises, notamment le prix du bien à la consommation. Par ailleurs, l'évolution de la division du travail modifie la demande de travail donc le salaire horaire de la période  $t$ , noté  $w_t$ .

Le profit d'une firme terminale s'écrit maintenant

$$(12) \quad \pi_{t,t}(p, x_i) = P_t(q)q - \int_0^{n^P} x_i w_t \, di - h w_t (n + 1)^P \text{ avec } 0 \leq i \leq n^P$$

La résolution demande la détermination de la fonction de demande qui se fait comme dans la section précédente.

LEMME 3 : *Les entreprises de rang  $t$  voient une fonction de demande inverse de la forme :  $P_t(q) = n \left( \gamma \frac{s-1}{s} - \frac{1}{s} \right) \chi_{t-1} \left( \frac{s-1}{s} \right)^t q^{-\frac{1}{s}}$ . Elles choisissent une division du travail  $p_t$  défini par :*

$$(13) \quad \left( \frac{n+1}{n} \right)^{p_t} = \frac{1}{h} \gamma \frac{\ln n}{\ln(n+1)} w_t^{-s} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t}$$

Les deux équations précédentes permettent de calculer, comme dans la précédente section, le ratio au sein de chaque firme du nombre de travailleurs consacrés à la production sur le nombre de travailleurs consacrés à l'organisation

$$(14) \quad \tau = \frac{n^{p_t} x}{h(n+1)^{p_t}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

L'équilibre du marché du travail permet maintenant de déterminer la division du travail et le taux de croissance d'équilibre.

## 4.1 Marché du travail

La demande totale de travail est la demande de travail d'une firme terminale, multipliée par leur nombre  $\chi_{t-1}$  :  $D_t^{travail} = n \chi_{t-1} (n^{p_t} x_t + h(n+1)^{p_t})$ . L'équilibre du marché du travail s'écrit

$$D_t^{travail} = L_t$$

L'étude des implications de cet équilibre, faite en annexe donne le résultat suivant.

PROPOSITION 2. *La division du travail au sein de chaque nouvelle entreprise tend vers une constante définie par*

$$(15) \quad p_\infty = \frac{u}{\ln n}$$

*où  $u$  est le taux de croissance de la population.*

Si la population ne croît pas, le coût du travail augmente trop vite par rapport au gains de productivité et la division du travail s'arrête. La division du travail est donc limitée par le marché du travail. Dans le cas contraire, la division du travail engendre des gains de productivité qui permettent une augmentation du revenu par tête. Le taux de croissance de l'économie est alors déterminé par la croissance de la population.

PROPOSITION 3. *Le taux de croissance du revenu réel par habitant  $g$  tend vers*

$$g_{\infty} = \frac{1}{s} (\gamma(s - 1) - 1) u$$

*où  $u$  est le taux de croissance de la population.*

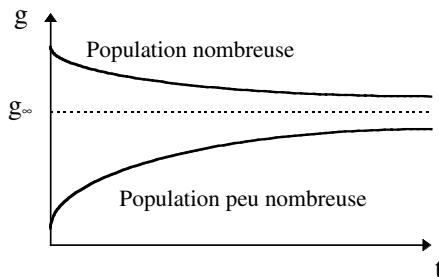
Le taux de croissance par tête de l'économie est une fonction croissante de  $\gamma$ . Ce coefficient mesure en effet les gains de productivité induits par une augmentation de la division du travail. De plus, le taux de croissance est une fonction croissante de  $s$  qui décroît lorsque le pouvoir de monopole des entreprises augmente. La présence du coefficient  $s$  dans le taux de croissance par tête n'est pas liée au pouvoir de monopole des entreprises, mais provient des rendements décroissants du secteur produisant le bien final. Si l'on fait converger ses rendements vers des rendements constants,  $s$  tend vers l'infini et le taux de croissance par tête tend vers  $\gamma u$ . Le taux de croissance par tête est positif ou négatif suivant la position relative de  $\gamma$  et de  $1/(s - 1)$ . En effet, il faut des gains de productivité suffisants pour permettre une croissance de la consommation par tête, car le secteur qui produit le bien final est à rendements décroissants.

Cette expression montre que la division du travail aboutit dans ce modèle à une croissance semi-endogène. Cette dénomination vient de JONES [1995] qui la reprend lui-même de ARROW [1962]. Elle recouvre la classe de modèle ayant un taux de croissance par tête positif si la population croît : ce n'est pas directement le niveau des ressources mais leur taux de croissance qui détermine le taux de croissance de long terme.

Cependant, lors de la dynamique transitoire, la taille de la population influence également le taux de croissance. En effet, une économie avec une population importante voit un coût du travail plus faible, donc une division du travail et une croissance plus importante. Ces effets sont présentés dans la figure 3, qui résume des développements menés en annexe. Si la quantité de travail disponible est faible, le taux de croissance croît vers sa valeur de long terme. Si la taille de la population est plus importante le taux de croissance décroît vers sa valeur de long terme. Dans tous les cas, plus la quantité de travail disponible est importante plus l'économie croît vite. Ainsi, même si la taille de la population est constante, donc le taux de croissance par tête nul à long terme, l'économie voit un taux de croissance positif qui décroît vers 0.

FIGURE 3

***Taux de croissance par tête en fonction de la taille de la population avec un taux de croissance de la population identique***





Enfin, cette croissance auto-entretenu n'est possible que si le revenu initial des consommateurs permet à la division du travail de se développer et de distribuer des revenus supplémentaires. Or la section précédente montre que des revenus trop faibles, ou un coût du travail ou de division du travail trop important ne permettent pas à celle-ci de s'amorcer. Dans ce cas l'économie est bloquée dans une trappe à pauvreté.

## 5 Croissance optimale

---

La résolution du programme du planificateur central permet de déterminer dans quel cas les allocations décentralisées sont optimales et, si elles ne le sont pas, quels sont les changements susceptibles d'augmenter le bien-être de l'économie. Contrairement aux agents de l'économie décentralisée, le planificateur central connaît la nature du progrès technique, et donc le lien entre la division interne du travail des entreprises et le nombre de nouveaux biens capitaux introduits dans l'économie. Le programme optimal, qui nécessite quelques calculs est résolu en annexe. Les principaux résultats sont résumés dans la proposition suivante.

*PROPOSITION 4. Le long d'un sentier de croissance équilibrée où la fraction de la population allouée à la production est constante, la division optimale de long terme est la même que dans le cas décentralisé :*

$$p^* = \frac{u}{\ln n}$$

*Le taux de croissance de la production par tête est aussi le même :*

$$g^* = \frac{1}{s}(\gamma(s-1) - 1)u$$

*Par contre, la fraction de la population consacrée à la production sur celle consacrée à l'organisation est différente :*

$$\tau^* = \frac{1}{\gamma \ln n} \left( \ln(n+1) - \beta \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) e^{\frac{s-1}{s}(\gamma+1)u} \right)$$

*Donc si  $\beta > 0$  alors  $\tau^* < \tau$ , c'est-à-dire que l'économie décentralisée a un ratio plus grand, donc relativement trop de personnes consacrées à la production.*

La division d'équilibre comme le taux de croissance de long terme sont les mêmes pour le programme optimal et pour l'économie décentralisée. Par contre la dynamique transitoire n'est pas optimale dans le cas décentralisé. En effet le ratio  $\tau$  des travailleurs alloués à la production sur les travailleurs alloués à l'organisation est inférieur au ratio optimal  $\tau^*$ . Le bien-être de la

société peut donc être augmenté en incitant les entreprises à consacrer plus de ressources à la coordination de la division du travail. Ceci tendra à augmenter le nombre de tâche donc les gains de productivité à la période suivante du fait de l'introduction de nouveaux biens capitaux. À long terme par contre, le taux de croissance par tête dans le cas décentralisé et dans le cas optimal coïncide. Cette propriété, optimalité de l'équilibre décentralisée, sous optimalité lors de la dynamique transitoire, se retrouve dans d'autres modèles de croissance sans effets d'échelle (JONES [1999]), comme celui de SEGERSTROM [1998] par exemple.

Les inefficacités qui se révèlent dans la dynamique transitoire sont de deux ordres. Elles ont toutes le même effet, qui est de diminuer la valeur de la division du travail décidées par les entreprises par rapport à l'optimum. La première inefficacité est la nature monopolistique de la production des entreprises, qui tend à diminuer le volume de la production : la prise en compte de l'élasticité prix par les entreprises tend à diminuer la valeur d'une unité marginale produite, car celle-ci contribue à diminuer le prix de vente de l'ensemble des autres unités produites. La seconde inefficacité concerne l'absence de compréhension par les entrepreneurs de la relation entre la diversité des tâches qu'ils déterminent et le nombre d'innovations à la période suivante. Ce choix de modélisation a été justifié à la section précédente. Si les entrepreneurs connaissaient cette causalité, ils décideraient une division interne du travail plus importante car l'augmentation du nombre de tâches augmentent le profit de l'entrepreneur une fois que sont entreprise est mécanisée.

## 6 Résumé et Conclusion

---

Ce modèle explique la croissance du revenu réel par habitant par la dynamique de la division du travail. Celle-ci est à la fois interne et externe. La division interne du travail dans les entreprises engendrent des gains de productivité et est limitée par des coûts d'organisation. Par ailleurs, celles-ci engendrent une demande potentielle pour des biens capitaux qui sont produits par des nouvelles entreprises qui divisent elles-même le travail. Ainsi, tant qu'il y existe des opportunités de profits, de nouvelles entreprises produisent de nouveaux biens capitaux, allongeant ainsi les détours de production. Contrairement aux modèles qui font dépendre le nombre d'innovations par période de la seule intensité de recherche, ce modèle formalise le processus qui engendre les opportunités d'innovation susceptibles d'augmenter la productivité. Le modèle a d'abord été étudié en équilibre partiel. L'allongement des détours de production croît lorsque la demande adressée aux entreprises augmente. La fonction de production agrégée présente alors des rendements différents de ceux des entreprises. L'existence des détours de production provient de deux tendances. Les coûts de coordination de la division du travail tendent à diminuer le nombre de tâches par entreprise et augmenter la coordination de celles-ci par le système de prix. L'existence de rendements croissants engendrés par la division du travail tend à augmenter la division du travail dans les entreprises. L'équilibre de ces deux tendances

délimite la division du travail au sein et entre les entreprises. Avec l'hypothèse de plein emploi des facteurs, la causalité circulaire entre la division interne et la division externe du travail engendre un allongement continu des détours de production, dont résulte un taux de croissance par tête positif qui dépend du taux de croissance de la population. La croissance provient alors de l'augmentation du nombre de tâches réalisées dans l'économie, qui sont incorporées dans des biens capitaux le long des détours de production. Enfin, l'étude du programme optimal a montré que l'équilibre décentralisé alloue trop peu de ressources à la coordination de la division du travail. ▼

## • Références bibliographiques

- AGHION P., HOWITT P. (1992). – « A Model of growth through Creative Destruction », *Econometrica*, 60(2), p. 323-351.
- AMABLE B. (1995). – « Endogenous Growth and Cycles through Radical and Incremental Innovation », *Document de travail du CEPREMAP*, n° 9504.
- ARROW K. (1962). – « The Economic Implications of Learning by Doing », *Review of Economic Studies*, XXIX(2), p. 155-173.
- D'AUTUME A. (1998). – « Théories Anciennes et Théories Nouvelles de la Croissance », dans Lassudrie-Duchêne, B. (eds) (1998), *Connaissances Économiques, Approfondissements*, Economica.
- BECKER G., MURPHY K. (1992). – « The Division of Labor, Coordination Costs, and Knowledge », *Quarterly Journal of Economics*, 107 (4).
- BENASSY J.-P. (1996). – « Taste for Variety and Optimum Production Patterns in Monopolistic Competition », *Economic Letters*, 52(1) ; july 1996.
- BOLTON P., DEWATRIPONT M. (1994). – « The firm as a Communication Network », *Quarterly Journal of Economics*, 109 (4).
- BOYER R., SCHMEDER G. (1990). – « Division du Travail, Changement Technique et Croissance. Un retour à Adam Smith », *Revue française d'économie*, volume V, hiver.
- COASE R. (1937). – « The Nature of the Firm », *Economica*, 1937, p. 386-405.
- DIXIT A., STIGLITZ J. (1977). – « Monopolistic Competition and Optimal Product Diversity », *American Economic Review*, p. 67, 297-308.
- EICHER T.S., TURNOVSKY S.-J (1999). – « Non-scale Models of Economic Growth », *The Economic Journal*, vol. 109, n°457.
- GILFILLAN S.C. (1970). – « *The Sociology of Invention* », Cambridge : The MIT Press, première édition 1935.
- GROSSMAN G.M., HELPMAN E. (1991). – « *Innovation and Growth in the Global Economy* », Cambridge : The MIT Press.
- HOWITT P. (1999). – « Steady Endogenous Growth with Population and R&D Inputs Growing », *Journal of Political Economy*, vol 107, n° 4.
- JONES Charles I. (1995). – « R&D-based Models of Economic Growth », *Journal of Political Economy*, CIII, p. 759-784.
- JONES Charles I. (1999). – « Growth: With or Without Scale Effects », *American Economic Review (Papers & Proceedings)* 89, p. 139-44.
- KALDOR N. (1972). – « The Irrelevance of Equilibrium Economics », *Economic Journal* (december 1972) traduit dans *Économie et Instabilité* (1987), Economica, Paris.
- KELLY M. (1997). – « The Dynamics of Smithian Growth », *Quarterly Journal of Economics*, CXII, n° 3.
- KORTUM S. (1997). – « Research, Patenting and Technological Change », *Econometrica*, 97(6), novembre 1997.
- LUCAS R.E. (1988). – « On the Mechanics of Economic Development », *Journal of Monetary Economics*, vol 22, p. 3-42.
- MARSHALL A. (1920). – « *Principles of Economics* », Macmillan, London.
- ROMER P. (1986). – « Increasing Returns and Long-Run Growth », *Journal of Political Economy*, vol. 94, n° 5, p. 1002-1037.
- ROMER P. (1990). – « Endogenous Technical Change », *Journal of Political Economy*, 98 (5) pt. 2, S71-S102.
- ROSENBERG N. (1982). – « *Inside the Black Box: Technology and Economics* », Cambridge University Press.
- SCHMOOKLER J. (1966). – « *Inventions and Economic Growth* », Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- SEGERSTROM P. (1998). – « Endogenous Growth Without Scale Effects », *American Economic Review*, vol 88 n° 5.

- SMITH A. (1976). – « *La Richesse des Nations* », Gallimard, Paris, première édition 1776.
- SOLOW R. (1956). – « A contribution to the Theory of Economic Growth », *Quarterly Journal of Economics*, p. 70, 65-94.
- STIGLER (1951). – « The Division of Labor is Limited by the Extent of the Market », *Journal of Political Economy*, LIX (June), p. 185-193.
- WEITZMAN M. (1998). – « Recombinant Growth », *Quarterly Journal of Economics*, vol. CXIII, mai, n° 2, p. 331-360.
- YANG X., BORLAND J. (1991). – « A Microeconomic Mechanism for Economic Growth », *Journal of Political Economy*, 34, p. 199-222.
- YOUNG A. (1928). – « Increasing Returns and Economic Progress », *Economic Journal* 38, p. 527-542.
- YOUNG A. (1998). – « Growth Without Scale Effects », *Journal of Political Economy*, vol. 106, n° 1, p. 41-64.

# ANNEXES

---

## Démonstration du lemme 1

La section précédente montre que le lemme est vrai à l'ordre 1. Supposons que le lemme est vrai à l'ordre  $t$ . Le programme des entreprises terminales, de rang  $t$  est alors

$$\max_{x_i, P_t} P_t(q)q - \int_0^{n^{P_t}} wx_i di - hw(n+1)^{P_t} \text{ où } 0 \leq i \leq n^P$$

Avec la fonction de demande (8) et la fonction de production (3). Les conditions du premier ordre donnent après quelques calculs

$$(16) \quad x_i = w^{-s} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_{t-1}} n^{(\gamma(s-1)-1)P_t}$$

$$(17) \quad = w^{-s} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t}$$

et

$$(18) \quad \left( \frac{n+1}{n} \right)^{P_t} = \frac{1}{h} \gamma \frac{\ln n}{\ln(n+1)} w^{-s} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t}$$

L'arrivée des entreprises de rang  $t+1$  entraîne une substitution des travailleurs par les machines si leur prix le permet. Si  $P_i$  est le prix du bien capital qui prend la place du travail réalisé sur la tâche  $i$  dans l'entreprise de rang  $t$ , le programme de l'entreprise devient

$$\max_{q_i} P_t(q_t)q_t - \int_0^{n^P} P_i q_i^d di \text{ où } k = 1 \dots n^P$$

La fonction de production est maintenant  $q_t = n^P \left( \gamma - \frac{1}{s-1} \right) \left( \int_0^{n^P} q_i^{\frac{s-1}{s}} di \right)^{\frac{s}{s-1}}$ .

Par l'hypothèse de récurrence, la fonction de demande inverse est (8). La maximisation du profit des entreprises de rang  $t$  donne les fonctions de demande

$$q_i^d = \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t} P_i^{-s}$$

Les entreprises de rang  $t+1$  qui produisent à un prix  $P_i$ ,  $0 \leq i \leq n^{P_t}$  voient donc une fonction de demande inverse

$$P_{t+1}(q) = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{t+1} n^{\left(\gamma \frac{s-1}{s} - \frac{1}{s}\right) \chi_t} q^{-\frac{1}{s}}$$

Les calculs qui ont permis de trouver (18) montre que (9) est vrai à l'ordre  $t + 1$ . Ce qui montre que le lemme est vrai au rang  $t + 1$ . Par récurrence le résultat est donc vrai à tous les ordres. ▼

## Démonstration du lemme 2

L'équation (16) donne la demande de travail pour chaque tâche. L'expression de la fonction de production (3) et de la fonction de demande inverse (8) permettent d'exprimer le prix fixé par les entreprises de rang  $t + 1$ , lorsqu'elles sont les dernières dans la division externe du travail.

$$(20) \quad P_{t+1,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\gamma P_{t+1}} w$$

Toutes les entreprises de rang  $t + 1$  décident donc du même prix. En calculant la production avec les équations (7) et (19), et en utilisant (8), l'on peut déterminer le prix fixé par les entreprises de rang  $t$  en fonction du prix fixé par les entreprises de rang  $t + 1$ .

$$(21) \quad P_{t,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\gamma P_{t+1}} P_{t+1,t+1}$$

L'arrivée de nouvelles entreprises ne changent pas le programme des entreprises préexistantes, sauf pour les dernières. Ainsi, le prix fixé dépend de la même manière du prix des inputs. Ainsi l'on peut directement écrire, en utilisant (21)

$$(22) \quad \forall l < t, \quad P_{l,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\gamma P_{t+1}} P_{l+1,t+1}$$

Avec (22) et (20), on montre  $P_{l,t} = \left(\frac{s}{s-1}\right)^{t+1-l} n^{-\gamma \sum_{k=l}^t P_k} w$ . En prenant cette équation exprimée au rang  $t$  et au rang  $t + 1$ , on trouve la dernière équation du lemme. ▼

## Démonstration de la proposition 1

L'équation (9) est la fonction de récurrence que vérifie la division interne du travail

$$(23) \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{P_t} = \frac{1}{h} \gamma \frac{\ln n}{\ln(n+1)} w^{-s} \left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t}$$

En divisant cette égalité en  $t + 1$  par celle en  $t$ , on trouve l'équation de récurrence

$$p_{t+1} (\ln(n+1) - \gamma(s-1)\ln n) = -s \ln \frac{s}{s-1} + \ln \frac{n+1}{n} p_t$$

Cette équation montre qu'il existe un seuil

$$(24) \quad p^s = s \ln \frac{s}{s-1} / \ln n^{\gamma(s-1)-1}$$

qui est l'équilibre instable de cette récurrence, tel que si  $p_1 < p^s$  alors la division interne du travail décroît et tend vers  $-\infty$ , et si  $p_1 > p^s$  alors la division du travail augmente tend vers  $+\infty$ . Ce seuil tend vers l'infini lorsque  $\gamma(s-1)$  tend vers 1.

On privilégie dans cette section le cas  $p_1 < p^s$ . En effet, le salaire étant constant dans cette section, il est irréaliste de considérer un cas où le nombre de entreprises augmente continument et tend vers l'infini, sans considérer l'équilibre du marché du travail. Cet équilibre est étudié dans la section suivante. On se restreint donc ici au cas  $p_1 < p^s$ .

On vérifie facilement que la solution de cette récurrence est

$$(25) \quad p_t = a^{t-1} p_1 - b \sum_{k=0}^{t-2} a^k$$

avec  $a = \ln \frac{n+1}{n} / \ln \frac{(n+1)}{n^{\gamma(s-1)}} > 0$  et  $b = s \ln \frac{s}{s-1} / \ln \frac{(n+1)}{n^{\gamma(s-1)}} > 0$ . La division du travail des entreprises de rang 1 est donnée par l'équation (5). Le graphe de la figure précédente correspond donc au cas où  $p_1 < p^s$ . La division du travail décroît et s'arrête en fait au premier rang  $t_{\max}$  tel que  $p_{t_{\max}} < p_{\min}$ . La solution (25) montre que la division interne de chaque firme, décroît lorsque  $p_1$  décroît. Ainsi, comme  $p_1$ , le rang  $t_{\max}$  est une fonction décroissante de  $h$  et  $w$ , ceci suffit à démontrer la proposition. ▼

### Démonstration du lemme 3

La démonstration de ce lemme est exactement celle de la section précédente. Le salaire horaire est maintenant indexé par la période. Les conditions du premier ordre pour les entreprises terminales donnent la demande de travail pour chaque tâche,  $x_t$  :

$$(26) \quad x_t = w_t^{-s} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t}$$

Le choix de la division interne du travail par l'entreprise est donnée par l'équation (12). Le coût de division du travail est

$$(27) \quad h w_t (n+1)^{p_t} = \gamma w_t^{1-s} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_{t-1}} n^{\gamma(s-1)p_t}$$

Ce qui permet de déduire (13). ▼



## Démonstration de la proposition 2

La demande totale de travail est la demande de travail d'une firme terminale, multipliée par leur nombre  $\chi_{t-1}$  :  $D_t^{travail} = n^{\chi_{t-1}} (n^{p_t} x_t + h(n+1)^{p_t})$ , où  $x_t$  et  $h(n+1)^{p_t}$  sont donnés par (26) et (27). L'équilibre  $L_t = D_t^{travail}$  s'écrit

$$(28) \quad L_t = w_t^{-s} \left( 1 + \gamma \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right) n^{\chi_{t-1}} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t} n^{p_t} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)}$$

On peut déduire le salaire horaire

$$(29) \quad w_t^s = L_t^{-1} \left( 1 + \gamma \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right) n^{\gamma(s-1)\chi_t} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{s(t+1)}$$

En utilisant (13), on trouve finalement l'équation de récurrence

$$(n+1)^{p_t} = \frac{1}{h} \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}} L_t n^{-\chi_{t-1}}$$

En divisant cette équation par la même équation exprimée pour la période  $t-1$ , on peut calculer la différence  $p_t - p_{t-1} = \frac{1}{\ln(n+1)} u - \frac{\ln n}{\ln(n+1)} p_{t-1}$ , où  $u$  est le taux de croissance de la population. Nous supposons qu'il est suffisamment faible pour permettre la simplification d'écriture  $\ln(1+u) = u$ . Soit la constante  $p_\infty = \frac{u}{\ln n}$ . L'équation précédente montre que  $p_t - p_\infty = \frac{\ln n}{\ln(n+1)} (p_{t-1} - p_\infty)$ . Cette égalité montre que la division interne du travail tend toujours, et de manière monotone vers la division du travail de long terme  $p_\infty$ . Ainsi, si la taille initiale de la population détermine une division du travail dans les entreprises de rang 0 égale à  $p_0 > p_\infty$ , alors la division interne tend en décroissant vers  $p_\infty$ . Dans le cas contraire, elle tend en croissant vers sa limite. ▼

## Démonstration de la proposition 3

Chaque firme de rang  $l \geq 1$ , non terminales a une production  $q_l = n^{p_l} \left( \gamma - \frac{1}{s-1} \right) \left( \int_0^{n^{p_l}} q_i^{\frac{s-1}{s}} di \right)^{\frac{s}{s-1}}$ , où  $q_i$  est la quantité d'input de type  $i$  que les entreprises de rang  $t$  achètent à une firme de rang  $t+1$ . Par symétrie, la quantité  $q_i$  achetée est la même pour toutes les entreprises et tous les inputs et est égale à la production d'une firme de rang  $t+1$ . D'où  $q_l = n^{p_l(\gamma+1)} q_{l+1}$ . Cette équation définit une équation de récurrence qui donne la production d'une firme qui produit un bien final  $q_1 = n^{(\gamma+1)\chi_{t-1}} q_t$ , avec  $\chi_{t-1} = \sum_{k=1}^{t-1} p_k$ . De même, en utilisant la fonction de production (3),

et par symétrie, les dernières entreprises, qui sont de rang  $t$  ont une production  $q_t = n^{(\gamma+1)p_t} x_t$ . En utilisant cette équation, on trouve  $q_1 = n^{(\gamma+1)\chi_t} x_t$ . Enfin la fonction de production des entreprises produisant les biens finals (1), donne enfin la production totale

$$(30) \quad Y_t = m q_1^{\frac{s-1}{s}} = m n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}} \chi_t x_t^{\frac{s-1}{s}}$$

En utilisant la production totale donnée par (30) on trouve  $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s} p_{t+1}} \left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)^{\frac{s-1}{s}}$ . En utilisant (26) et (29), on obtient

$$(31) \quad \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \left(\frac{L_{t+1}}{L_t} n^{\gamma p_{t+1}}\right)^{\frac{s-1}{s}}$$

La puissance  $\frac{s-1}{s}$  vient des rendements décroissants des entreprises produisant le bien final. Le terme  $n^{\gamma p_{t+1}}$  représente les gains de productivité induit par une augmentation de la division interne du travail. Enfin le terme  $\frac{L_{t+1}}{L_t}$  traduit simplement l'effet de l'augmentation des ressources totales sur la production totale. On trouve un taux de croissance par tête  $g_{t+1} = \ln \frac{Y_{t+1}}{Y_t} - u = \gamma \frac{s-1}{s} \ln n p_{t+1} - \frac{1}{s} u$ . Cette équation montre que la présence de  $s$  dans le taux de croissance provient des rendements décroissants du secteur produisant le bien final, qui fait apparaître une puissance  $\frac{s-1}{s}$  dans l'équation (31). De plus, cette dernière équation montre que la dynamique du taux de croissance est la même que celle de la division interne du travail, ce qui nous permet de déduire la dynamique transitoire du taux de croissance de celle de la division interne du travail. En utilisant la valeur de la division interne de long terme on trouve le taux de croissance par tête d'équilibre

$$g_\infty = \frac{s-1}{s} \left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right) u$$

▼

## Démonstration de la proposition 4

Le planificateur maximise l'utilité intertemporelle des ménages qui ont une préférence pour le présent  $r$ . Il choisit à chaque période le temps  $x$  alloué à chaque tâche de l'économie, la demande de facteurs, ainsi que la division interne du travail  $p$  dans chaque entreprise. Pour rendre l'exposition plus facile, la résolution est fractionnée en 2 lemmes.

LEMME 5 : La production totale à chaque période est

$$Y_t = n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}} \chi_t x_t^{\frac{s-1}{s}}.$$

L'écriture du programme du planificateur se simplifie car il est symétrique, c'est-à-dire que le temps optimal alloué à chaque tâche est le même pour toutes les tâches et que la division interne du travail est la même dans toutes les entreprises de même rang. Les entreprises de rang  $l$  produisent une quantité  $q_{i,l}^o$  avec une demande d'input  $q_{i,j,l}^d$  de type  $j$  demandé par l'entreprise  $i$  de rang  $l$ . Chaque bien étant produit par une seule entreprise, la demande  $q_{i,j,l}^d$  des entreprises de rang  $l$  est égale à la production d'une entreprise  $k$  de rang  $l + 1$ ,  $q_{k,l+1}^o$ .

Toutes les entreprises de même rang  $l$  ont une même division interne du travail  $p_l$ . Le nombre de tâche par entreprise est donc  $n^{p_l}$ , qui donne lieu à l'apparition d'autant de nouvelles entreprises, pour chaque entreprise de rang  $l$ . Ainsi les entreprises produisant les biens finals sont un continuum de longueur  $m$ , les entreprises de rang 1 sont un continuum de longueur  $mn^{p_0}$  et, avec la notation de la section précédente  $\chi_t = \sum_{k=0}^t p_k$ , les entreprises de rang  $l$  sont un continuum de longueur  $mn^{\chi_{l-1}}$ .  $\chi_t$  obéit à la loi de récurrence  $\chi_t = \chi_{t-1} + p_t$ .

Les entreprises non terminales ont une fonction de production

$$q_{i,l}^o = n^{p_l} \left( \gamma - \frac{1}{s-1} \right) \left( \int_0^{n^{p_l}} \left( q_{i,j,l}^d \right)^{\frac{s-1}{s}} dj \right)^{\frac{s}{s-1}} = n^{(\gamma+1)p_l} q_{i,j,l}^d$$

avec  $q_{i,j,l}^d = q_{k,l}^o$  avec  $0 \leq i \leq n^{\chi_{l-1}}$ ,  $0 \leq j \leq n^{p_l}$  et  $0 \leq k \leq n^{\chi_{l-1}} * n^{p_l} = n^{\chi_l}$ .

La fonction de production des entreprises terminales est

$$q_{i,t}^o = n^{p_t} \left( \gamma - \frac{1}{s-1} \right) \left( \int_0^{n^{p_t}} \left( x_{i,j,t}^d \right)^{\frac{s-1}{s}} dj \right)^{\frac{s}{s-1}} = n^{(\gamma+1)p_t} x_{i,j,t}^d$$

Comme toutes les entreprises de même rang  $l$  produisent la même quantité  $q_l$ , les équations précédentes donnent  $q_l = n^{(\gamma+1)p_l} q_{l+1}$  pour  $l < t - 1$ , et  $q_t = n^{(\gamma+1)p_t} x_t$ . Finalement la production du secteur produisant le bien final est

$$Y_t = mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s} \sum_{k=0}^t p_k} x_t^{\frac{s-1}{s}} = n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}} \chi_t x_t^{\frac{s-1}{s}} \quad C.Q.F.D.$$

Cette équation est la même que dans le cas décentralisé. Elle utilise en effet l'équilibre des marchés et les fonctions de production, qui sont identiques dans les deux cas.

LEMME 6 : *Le programme optimal est*

$$(32) \quad \max_{p_t, x_t} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}} \chi_k x_k^{\frac{s-1}{s}}$$

$$n^{\chi_{k-1}} (n^{p_k} x_k + h (n+1)^{p_k}) = L_k$$

$$(33) \quad \chi_k = \chi_{k-1} + p_k$$

Le planificateur fait face à deux contraintes. La première est l'équilibre du marché du travail. Celui-ci est donné par  $mn^{\chi_{t-1}} (n^{p_t} x_t + h (n+1)^{p_t}) = L_t$  : l'offre de travail  $L_t$  est égale à la demande de travail de chaque firme pour la production  $n^{p_t} x_t$  et pour l'organisation  $h (n+1)^{p_t}$ , multipliée par le nombre de entreprises terminales  $mn^{\chi_{t-1}}$ . La seconde contrainte est l'externalité reliant la division interne et externe du travail. Cette externalité est résumée par l'équation  $\chi_t = \chi_{t-1} + p_t$  : le nombre d'entreprises dépend de la division interne du travail et du nombre de firme de la période précédente.

Les résultats principaux sont donnés par la proposition 4. Le lagrangien s'écrit

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \beta^k mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}(\chi_{k-1}+p_k)} x_k^{\frac{s-1}{s}} \right]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \theta_k (\chi_k - \chi_{k-1} - p_k) + \lambda_k (n^{\chi_{k-1}} n^{p_k} x_k + n^{\chi_{k-1}} h (n+1)^{p_k} - L_k) \right]$$

La dérivée par rapport à  $x_t$  donne

$$(34) \quad \frac{s-1}{s} \beta^t mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}(\chi_{t-1}+p_t)} x_t^{-\frac{1}{s}} + \lambda_t n^{\chi_{t-1}} n^{p_t} = 0$$

La dérivée par rapport à  $\chi_t$  donne

$$(35) \quad (\gamma+1) \frac{s-1}{s} \ln n \beta^{t+1} mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}(\chi_t+p_{t+1})} x_{t+1}^{\frac{s-1}{s}} + \theta_t - \theta_{t+1}$$

$$(36) \quad + \lambda_{t+1} \ln n n^{\chi_t} (n^{p_{t+1}} x_{t+1} + h (n+1)^{p_{t+1}}) = 0$$

La dérivée par rapport à  $p_t$  donne

$$(37) \quad (\gamma+1) \frac{s-1}{s} \ln n \beta^t mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}(\chi_{t-1}+p_t)} x_t^{\frac{s-1}{s}} - \theta_t$$

$$(38) \quad + \lambda_t n^{\chi_{t-1}} (\ln n n^{p_t} x_t + \ln (n+1) h (n+1)^{p_t}) = 0$$

L'équation (35) avec la contrainte (32) en  $t$  et (34) donne

$$\begin{aligned}
 (\gamma + 1) \frac{s-1}{s} \ln n \beta^{t+1} m n^{(\gamma+1) \frac{s-1}{s}} (\chi_t + p_{t+1}) x_t^{\frac{s-1}{s}} \\
 &= -\theta_t + \theta_{t+1} - \lambda_{t+1} \ln n L_{t+1} - (\gamma + 1) \ln n \lambda_t n^{\chi_t-1} n^{p_t} x_t \\
 &= -\theta_{t-1} + \theta_t - \lambda_t \ln n L_t
 \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda_t \ln n (L_t - (\gamma + 1) n^{\chi_t} x_t) = \theta_t - \theta_{t-1}$$

(34) et (37) donnent

$$\begin{aligned}
 (39) \quad & -(\gamma + 1) \ln n \lambda_t n^{\chi_t} x_t + \lambda_t \ln (n + 1) n^{\chi_t-1} (n^{p_t} x_t + h (n + 1)^{p_t}) \\
 & + \ln \frac{n}{n+1} \lambda_t n^{\chi_t} x_t = \theta_t
 \end{aligned}$$

Soit

$$\theta_t = \lambda_t (\ln (n + 1) L_t - (\ln (n + 1) + \gamma \ln n) n^{\chi_t} x_t)$$

(35) et (37) donne

$$\theta_{t-1} - \theta_t + \lambda_t \ln n L_t = -\theta_t + \lambda_t \ln (n + 1) L_t + \ln \frac{n}{n+1} \lambda_t n^{\chi_t} x_t$$

on trouve le système

$$(40) \quad \theta_{t-1} = \lambda_t \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) (L_t - n^{\chi_t} x_t)$$

$$(41) \quad \theta_t - \theta_{t-1} = \lambda_t \ln n (L_t - (\gamma + 1) n^{\chi_t} x_t)$$

$$(42) \quad \lambda_t = -\frac{s-1}{s} \beta^t m n^{(\gamma+1) \frac{s-1}{s} - 1} \chi_t x_t^{-\frac{1}{s}}$$

$$(43) \quad L_t = n^{\chi_t} x_t + n^{\chi_t-1} h (n + 1)^{p_t}$$

$$(44) \quad \chi_t = \chi_{t-1} + p_t$$

La dynamique transitoire de ce système est impossible à étudier analytiquement, cependant l'on peut étudier les propriétés des sentiers de croissance équilibrée, c'est à dire les sentiers de croissance à taux constant.

Notons  $\rho$  la proportion de la population consacrée à la production, soit  $n^{\chi_t} x_t = \rho L_t$ . La fraction de la population consacrée à la coordination est  $n^{\chi_t-1} h (n + 1)^{p_t} = (1 - \rho) L_t$ . L'équation (43) donne la production

$$\begin{aligned}
 Y_t &= m n^{(\gamma+1) \frac{s-1}{s}} \chi_t x_t^{\frac{s-1}{s}} = -\frac{s}{s-1} \beta^{-t} \lambda_t n^{\chi_t} x_t \\
 &= -\frac{s}{s-1} \beta^{-t} \lambda_t \rho L_t
 \end{aligned}$$

Le système se réécrit

$$\begin{aligned}\theta_{t-1} &= \lambda_t \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) (1-\rho) L_t \\ \theta_t &= \lambda_t [\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho \ln n] L_t\end{aligned}$$

Les deux premières équations donnent

$$\lambda_t \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) (1-\rho) L_t = \lambda_{t-1} [\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho \ln n] L_{t-1}$$

Soit

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}} = \frac{[\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho \ln n] L_{t-1}}{\ln \left( \frac{n+1}{n} \right) (1-\rho) L_t}$$

La croissance de la production totale est

$$\begin{aligned}\frac{Y_t}{Y_{t-1}} &= \frac{1}{\beta} \frac{\lambda_t L_t}{\lambda_{t-1} L_{t-1}} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{[\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho \ln n]}{\ln \left( \frac{n+1}{n} \right) (1-\rho)}\end{aligned}$$

Comme on a

$$n^{\chi_{t-1}} h(n+1)^{p_t} = (1-\rho) L_t$$

En divisant cette équation par son expression en  $t-1$ , on trouve

$$n^{p_{t-1}} (n+1)^{p_t - p_{t-1}} = 1 + u$$

En prenant le logarithme, on trouve l'équation de récurrence

$$p_t - p_{t-1} = \frac{1}{\ln(n+1)} u - \frac{\ln n}{\ln(n+1)} p_{t-1}$$

Cette équation est la même que dans le cas décentralisé, ainsi la division interne du travail tend vers la valeur

$$p^* = \frac{u}{\ln n}$$

La production s'écrit

$$Y_t = mn^\gamma \frac{s-1}{s} \chi_t (n^{\chi_t} \chi_t)^{\frac{s-1}{s}} = mn^\gamma \frac{s-1}{s} \chi_t (\rho L_t)^{\frac{s-1}{s}}$$

Soit

$$g_t = \ln \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - u = \gamma \frac{s-1}{s} p_t \ln n + \frac{s-1}{s} u - u$$

D'où

$$g^* = \gamma \frac{s-1}{s} u + \frac{s-1}{s} u - u = \frac{1}{s} (\gamma(s-1) - 1) u$$

La fraction de la population consacrée à la production est déterminée par

$$\begin{aligned} \frac{Y_t}{Y_{t-1}} &= \frac{1}{\beta} \frac{\lambda_t L_t}{\lambda_{t-1} L_{t-1}} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{[\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho \ln n]}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(1-\rho)} \end{aligned}$$

L'égalité  $\ln \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - u = g^*$  donne

$$\ln \left[ \frac{1}{\beta} \frac{[\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho \ln n]}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(1-\rho)} \right] = \frac{1}{s} (\gamma(s-1) - 1 + s) u$$

Comme  $\rho$  est la fraction de la population consacrée à la production sur la population totale, le ratio  $\tau^* = \rho/(1-\rho)$  est le ratio de la population consacrée à la production sur la population consacrée à l'organisation. L'expression précédente permet de déterminer  $\tau^*$ .

$$\tau^* = \frac{1}{\gamma \ln n} \left( \ln(n+1) - \beta \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) e^{\frac{s-1}{s}(\gamma+1)u} \right)$$

Le ratio optimal  $\tau^*$  et le ratio décentralisé  $\tau$  coïncident si  $\beta$  est nul. Ce cas correspond à une préférence pour le présent totale de telle sorte que le planificateur maximise à chaque période l'utilité de la génération de la période. Dans tous les autres cas, la fraction optimale de la population consacrée à la production est inférieure à celle du cas décentralisé.